

Agosto 1986

**RISCHIO E RENDIMENTO DEI TITOLI A TASSO FISSO
E A TASSO VARIABILE IN UN MODELLO STOCASTICO UNIVARIATO**

di E. Barone e R. Cesari

C. Caranza, F. Cotula, A. Fazio, G. Galli, L. Guiso, S. Micossi, F. Papadia, P. Sabbatini, D. Terlizze, I. Visco hanno letto e commentato una prima versione del lavoro ed E. Orsingher, dell'Università di Roma, ha suggerito miglioramenti ad una prima versione dell'Appendice A.; G. Felicetti ha curato la stesura dattilografica, le figure e le tavole. Anche in questa sede desideriamo esprimere il nostro ringraziamento, consapevoli di non aver saputo tener conto di tutte le osservazioni ricevute e di rimanere gli unici responsabili di errori ed omissioni.

SOMMARIO

Nella I parte del lavoro si analizza un modello stocastico univariato definito nel continuo [Cox, Ingersoll, Ross (1978)] in cui: a) la *term structure* è funzione della sola dinamica del tasso a breve privo di rischio; b) l'appropriata misura di rischiosità per i titoli a tasso fisso e a tasso variabile è definita dalla *duration* stocastica. Nella II parte, assunto il tasso sui BOT a 3 mesi come tasso privo di rischio, si ottengono *duration* e prezzi d'equilibrio dei titoli di varia scadenza; per i CCT, in particolare, si distinguono i contributi al rischio da parte delle singole caratteristiche contrattuali.

INDICE

1.	IL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS	1
1.1	Introduzione	1
1.2	La teoria dei titoli contingenti	1
1.3	Struttura del lavoro	2
2.	UN MODELLO PER LA <i>TERM STRUCTURE</i>	3
2.1	Vita residua, <i>duration</i> e rischio	9
2.2	I titoli a tasso variabile	12
	<i>Cedole continue</i>	12
	<i>Cedole discrete determinate alle date di pagamento</i>	12
	<i>Cedole discrete determinate prima delle date di pagamento</i>	13
3.	UN'APPLICAZIONE DEL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS AL CASO ITALIANO	14
3.1	Stima della dinamica del tasso a breve: giugno '81 - novembre '84	14
3.2	La <i>term structure</i> per i BOT e le misure di durata per i titoli a tasso fisso	16
3.3	Rischio e rendimento dei titoli a tasso variabile	19
	BIBLIOGRAFIA	21
	APPENDICE A	23
	Processi diffusivi	23
	<i>Il moto browniano standard</i>	23
	<i>Equazioni differenziali di Ito (1944) e processi diffusivi</i>	24
	<i>Il lemma di Ito (1951)</i>	25
	APPENDICE B	27
	Titoli a tasso variabile	27

1. IL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS

1.1 Introduzione

Secondo una teoria consolidata che risale a Markowitz (1959) il procedimento di selezione del portafoglio ottimale da parte di un investitore può essere diviso in tre stadi. Il primo inizia con l'esame dell'informazione disponibile relativa ai valori mobiliari presenti sui mercati e termina con la stima della loro redditività e rischio. Il secondo conduce a determinare la frontiera dei portafogli efficienti, caratterizzati dal massimo rendimento atteso per ogni livello di rischio assunto. Il terzo consiste, infine, nello scegliere un particolare portafoglio, fra quelli efficienti, in base ad una data funzione di utilità, rappresentativa delle preferenze dell'investitore verso il rischio.

La stima del rischio e del rendimento dei valori mobiliari, che è alla base del processo di selezione del portafoglio, si può ottenere correttamente facendo ricorso ai risultati finanziari tradizionali solo in casi speciali e solo per i più semplici contratti finanziari.

Quando i contratti contengono elementi aleatori quali, ad esempio, clausole di opzione o di indicizzazione, e quando si intende tener conto del carattere intrinsecamente multidimensionale del rischio, le tecniche e gli stessi concetti finanziari tradizionali risultano inadeguati e sorge l'esigenza di una teoria sistematica e unitaria dei valori mobiliari che generalizzi in ambito stocastico multivariato i concetti e le misure di rischio e redditività.

La teoria finanziaria che ha visto le sue prime applicazioni nella valutazione delle opzioni [*continuous-time contingent-claims pricing theory*; cfr. Black-Scholes (1973), Merton (1973a) e la rassegna in Smith (1979)] sembra fornire uno schema analitico sufficientemente generale e flessibile per tentare una sistemazione e una soluzione dei suddetti problemi teorici, resi di particolare rilevanza pratica dall'innovazione finanziaria e dallo sviluppo dei mercati.

1.2 La teoria dei titoli contingenti

La teoria dei titoli contingenti (*contingent claims*), al prezzo di alcune ipotesi semplificatrici, consente di ricavare in funzione delle variabili esogene e della loro dinamica, il prezzo d'equilibrio e il rendimento di varie fattispecie di titoli obbligazionari, a tasso fisso o a tasso variabile, e di impostare razionalmente l'analisi delle rischiosità connesse a ciascun titolo.¹ Fondamento della teoria è la condizione che, in equilibrio, i prezzi di mercato siano tali da escludere possibilità di arbitraggi non rischiosi. Ciò significa che, in assenza di costi di transazione, portafogli con egual grado di rischio devono produrre il medesimo rendimento. In tal modo la condizione di non arbitraggio impone una restrizione non banale sul tasso di rendimento atteso da un titolo privo di cedola, a scadenza arbitraria: esso sarà pari al tasso privo di rischio più un premio al rischio dato dal prodotto della "quantità" di rischio per il "prezzo" d'equilibrio di un'unità del medesimo rischio. Tale "quantità" di rischio, definita dalla variazione relativa del prezzo del titolo rispetto ai fattori di rischio (in generale le variabili di stato del sistema) risulta proporzionale alla varianza del tasso di rendimento del titolo. Naturalmente, il tasso privo di rischio e il prezzo unitario del rischio sono variabili tipicamente endogene e quindi, al fine di evitare improprie ipotesi di esogeneità, si richiede la costruzione di un modello generale che specifichi le caratteristiche del settore reale dell'economia e le preferenze degli operatori, da cui le suddette variabili dipendono. La configurazione di equilibrio

¹ A seconda del ricorso o meno a specifiche ipotesi sulle preferenze degli operatori, nell'ambito della teoria della valutazione dei titoli contingenti si distinguono due approcci alternativi: nel primo, al fine di ottenere i prezzi e i rendimenti delle attività finanziarie, si costruisce un modello d'equilibrio economico generale, intertemporale e stocastico, usualmente a tempo continuo, in cui sono specificate la dinamica delle variabili di stato e delle opportunità di investimento, e le preferenze individuali. Gli operatori sono assunti omogenei e le aspettative razionali nel senso di Hurwicz (1946) e Muth (1961) - conoscenza delle distribuzioni di probabilità e, in particolare, di tutti i momenti rilevanti. Dall'equilibrio generale si ricava l'equilibrio parziale sui mercati degli *assets* [cfr. Merton (1973b) e Cox, Ingersoll e Ross (1978)]. Nel secondo approccio si impongono semplicemente deboli restrizioni sulle aspettative e la condizione di non arbitraggio, evitando ipotesi sulle preferenze degli operatori e i connessi problemi d'aggregazione nel caso generale di operatori non omogenei [cfr. Black e Scholes (1973), Merton (1973a), Vasicek (1977), Garman (1977)]. L'approccio di equilibrio generale ha tuttavia il triplice vantaggio di assicurare l'esistenza di un equilibrio globale sottostante all'equilibrio parziale sui mercati degli *assets*, di rendere espliciti i legami endogeni tra variabili dell'economia reale e variabili finanziarie e di fornire la forma esplicita esatta del premio al rischio che soddisfa la condizione di non arbitraggio.

tori, da cui le suddette variabili dipendono. La configurazione di equilibrio che ne discende rende internamente consistente l'intero modello ed in particolare i mercati finanziari.

Il modello d'equilibrio generale di Cox, Ingersoll e Ross (d'ora in poi CIR) (1978, 1985a, b) è uno dei risultati più significativi della *contingent claims pricing theory*. Esso è verificabile empiricamente nel caso particolare in cui il tasso istantaneo privo di rischio guida la dinamica del sistema economico e determina la struttura per scadenza dei titoli senza rischio di insolvenza, a cedola nulla e rimborso unico unitario alla scadenza e quindi i prezzi dei titoli a tasso fisso e a tasso variabile.

Il presente lavoro prende a base tale modello semplificato, unidimensionale, al fine di giungere a una valutazione del rischio e del rendimento dei titoli a tasso fisso e a tasso variabile, e di mostrare con riferimento al caso italiano le capacità analitiche ed empiriche del modello e le potenzialità di analoghi modelli multidimensionali.

1.3 Struttura del lavoro

Il lavoro prosegue nel seguente modo: nel paragrafo 2 si delineano le caratteristiche del modello generale di CIR e della sua specializzazione ottenuta assumendo l'esistenza di un unico fattore di rischio legato alla variazione dei tassi d'interesse (rischio base). Si ricava così la forma generale del prezzo dei titoli a cedola nulla in funzione della scadenza (*term structure*) e del tasso istantaneo privo di rischio. Quest'ultimo determina l'intera struttura dei rendimenti ed è un processo stocastico la cui dinamica ricorda l'ipotesi keynesiana di ritorno atteso ad un livello normale; nel paragrafo 2.1 si introduce un'appropriata misura temporale di rischiosità dei titoli a tasso fisso (*stochastic duration*) e la si confronta con le misure tradizionali; nel paragrafo 2.2 l'analisi è estesa ai titoli a tasso variabile.

Nella seconda parte del lavoro si tenta un'applicazione del modello proposto al caso italiano, con lo scopo di mostrare non tanto stime numeriche affidabili quanto piuttosto le capacità operative dell'approccio teorico ed i suoi possibili usi in ausilio agli strumenti correnti di valutazione delle politiche finanziarie.

Nel paragrafo 3.1 si ottengono stime econometriche dei parametri del modello univariato; nel paragrafo 3.2 alcune simulazioni mostrano come, da stime soggettive (ad esempio obiettivi di politica monetaria) dei parametri che definiscono la dinamica del tasso a breve (media di lungo periodo, velocità di aggiustamento al *trend*, varianza) si possa ricavare la corrispondente struttura per scadenza dei rendimenti e quindi le indicazioni per una coerente politica di gestione del debito e per una valutazione quantitativa del rischio e dei prezzi di equilibrio dei titoli.

Nel paragrafo 3.3 si analizzano, in termini di prezzo di equilibrio e di rischio, gli effetti singoli e combinati delle principali caratteristiche dei CCT quali il tasso di riferimento nell'indicizzazione, lo *spread* additivo, l'intervallo di predeterminazione delle cedole, il livello della prima cedola. Lo scarto tra i prezzi di equilibrio ottenuti ed i prezzi di emissione osservati è stato attribuito ad una rischiosità aggiuntiva, dovuta a fattori estranei al modello, di cui si è ricavata un'approssimazione quantitativa nell'ipotesi che un'unità addizionale di rischio esogeno abbia lo stesso effetto-prezzo di un'unità di rischio base. Naturalmente quanto più lontana è la data di rimborso di un titolo, tanto maggiore è l'importanza che vengono ad assumere i fattori diversi dal rischio base, cioè i fattori esogeni al modello. Di conseguenza, per i titoli a lunga scadenza il rischio base diviene più un livello minimo del rischio totale che una sua approssimazione.

Si impongono così alcune estensioni del modello e alcune linee di ricerca futura.

In primo luogo occorrerebbe introdurre esplicitamente il rischio d'inflazione e quindi la dinamica dei prezzi e dei tassi reali come primo passo verso un modello in cui si tenga conto delle interdipendenze tra moneta, titoli, livello generale dei prezzi e variabili reali.²

² È noto che la moneta, intesa come *asset* a rendimento nominale certo nullo, unità di conto e mezzo di pagamento, è un titolo dominato in un modello che assuma assenza di costi di transazione, perfetta liquidità dei titoli e l'esistenza di un titolo non rischioso a rendimento positivo. Per giustificare una domanda di moneta in un contesto di mercati efficienti ed operatori massimizzanti si devono introdurre ipotesi che comportino diversi gradi di liquidità degli *assets* (costi di transazione, razionamenti quantitativi derivanti da mercati non completamente centralizzati etc.) o ipotesi che escludano l'esistenza di *assets* non rischiosi in termini nominali e reali (inflazione). Il problema della moneta nella teoria finanziaria, sebbene da tempo sollevato [cfr. Marschak (1938) e i riferimenti ivi citati], rimane tuttavia in gran parte aperto.

Più in generale, occorrerebbe modellare i vari tipi di rischio in modo da esplicitarne la dinamica e le reciproche relazioni. Ciò sembra in certa misura più agevole per quanto riguarda il rischio di cambio che per quanto riguarda il rischio di illiquidità,³ il rischio d'insolvenza (per i titoli privati) e, per i titoli pubblici, il rischio derivante dal fatto che lo Stato è l'unico debitore-emittente che ha il potere di modificare, prima della scadenza, le clausole dei contratti obbligazionari.

Il modello proposto, tuttavia, sembra sufficientemente flessibile per poter contemplare generalizzazioni lungo le linee indicate.

2. UN MODELLO PER LA *TERM STRUCTURE*

In un'economia concorrenziale, la struttura per scadenza dei rendimenti, vale a dire la relazione d'equilibrio tra i rendimenti dei titoli con egual cedola (nulla) e varia scadenza,⁴ sembrerebbe dover essere caratterizzata dalla condizione di eguaglianza tra i rendimenti attesi per periodo di detenzione per tutti i titoli e portafogli, e per tutti i periodi di detenzione. Si può dimostrare tuttavia [CIR(1981a) p. 774] che, in un contesto stocastico, tale condizione è eccessiva a causa del fatto che in generale, se $P(t, T)$ è il prezzo corrente di un titolo con scadenza in T , vale

$$E\left(\frac{1}{P}\right) \neq \frac{1}{E(P)} \quad (1)$$

La condizione di equilibrio può essere soddisfatta scegliendo uno specifico periodo di detenzione dato, nel continuo, dal successivo istante. Si parla, in tal caso, di ipotesi delle aspettative locali. In forma generale (o non pura) comprensiva cioè di un premio per la scadenza tale ipotesi è

$$E_t(dP/P) = [r(t) + \pi(t, T)] dt \quad (2)$$

dove E_t è l'operatore valor medio condizionato allo stato in t , dP/P è il tasso di rendimento *ex post* ottenibile detenendo il titolo per il successivo istante dt e $r(t)$ è il tasso istantaneo di rendimento su un investimento a scadenza istantanea.

Tale ipotesi emerge in modo del tutto naturale dall'analisi di un sistema d'equilibrio dinamico, stocastico, continuo.⁵

Sia $y(t)$ il vettore a K dimensioni ($K \geq 1$) delle variabili di stato del sistema economico e la sua dinamica sia descritta dal sistema di equazioni differenziali stocastiche di Ito⁶

³ In contrapposizione ai suoi critici, Harry Markowitz nella prefazione alla seconda edizione (1970) della sua nota monografia scrive: «*My own chief theoretical worry remains (elsewhere) with the gap between a theory based on perfect liquidity and the existence of illiquidities*».

⁴ Sulla *term structure* esiste una vastissima letteratura che si può far risalire al secolo scorso. In via generale, si possono individuare due distinti approcci teorici: la teoria dei mercati segmentati e la teoria delle aspettative. Il primo filone assume che per ciascun tipo di titolo esista un mercato distinto e separato dagli altri. I tassi d'interesse sono determinati sulla base della domanda e dell'offerta relative a ciascuna scadenza (cfr. la classica teoria dei fondi pre-stabili) e non sussiste alcun legame diretto tra i tassi relativi a scadenze diverse. Viceversa, le varie teorie delle aspettative condividono l'idea che esista un certo grado di sostituibilità tra i titoli di diversa scadenza e che, quindi, si possa stabilire una relazione diretta stabile tra i tassi in equilibrio. Tale situazione d'equilibrio viene caratterizzata dall'eguaglianza tra certi rendimenti correnti e certi rendimenti futuri attesi più, eventualmente, un premio per la scadenza (*term premium*) dipendente dalle ipotesi sul grado di incertezza delle aspettative e sulle preferenze degli investitori verso il rischio e verso la scadenza (*liquidity o preferred habitat premia*). Se il *term premium* è nullo si parla di ipotesi delle aspettative in forma pura.

⁵ In alternativa all'ipotesi delle aspettative locali basata sul tasso di rendimento per periodo di detenzione (*holding period rate of return*) si può formulare una condizione d'equilibrio in termini di tasso a termine (*forward*) o di tasso a scadenza (*yield to maturity*) o di ritorno a scadenza (*return to maturity*). Le due prime formulazioni alternative risultano equivalenti nel continuo e, anziché su $E(dP/P)$, si basano sull'aspettativa $E[d \ln(P)]$, mentre la terza si basa su $E[d(1/P)/(1/P)]$. Per la diseguaglianza di Jensen, le tre ipotesi in forma pura sono mutuamente incompatibili. Inoltre, si può dimostrare - via lemma di Ito - che l'ipotesi basata sul tasso di rendimento per periodo di detenzione è l'unica formulazione dell'ipotesi delle aspettative compatibile con la condizione di non arbitraggio (qualunque sia il *term premium*) in un modello a tempo continuo, mercati perfetti e aspettative razionali [CIR (1981a)].

$$dy_i(t) = m_i(t, \mathbf{y})dt + \mathbf{g}'_i(t, \mathbf{y})d\mathbf{Z}(t) \quad i = 1, \dots, K \quad (3)$$

dove $\mathbf{Z}(t)$ è un processo standard di Wiener a K -dimensioni, m_i è la variazione istantanea attesa di y_i nell'unità di tempo e \mathbf{g}'_i è un vettore riga a K -dimensioni che misura la risposta della i -esima variabile di stato a ciascuna delle K fonti d'incertezza, tale che la matrice delle varianze/covarianze $\mathbf{G}\mathbf{G}' = \{\mathbf{g}'_i \mathbf{g}_j\}$ sia di rango K definita positiva.⁷

Se l'economia è concorrenziale, con tempo e scambi continui, essendo il flusso d'informazione generato dalla (3) continuo, ne segue che i prezzi d'equilibrio dei valori mobiliari sono integrali di Ito [Huang (1985)].⁸ In particolare, la dinamica del prezzo $B(t, T, \mathbf{y})$ di un titolo che dà diritto ad una lira in T (cioè tra $T - t$ anni) e a un flusso di pagamenti aleatori $C(t, \mathbf{y})$ dal periodo corrente fino a T è data da

$$dB(t, T, \mathbf{y}) = [h(t, T, \mathbf{y})B - C(t, \mathbf{y})]dt + \mathbf{W}'(t, T, \mathbf{y})B d\mathbf{Z}(t) \quad (4)$$

dove il rendimento totale medio hB è definito come la somma della variazione di conto corrente (gli incassi C) e di quella di conto capitale ($hB - C$). Dal lemma di Ito risulta

$$h(t, T, \mathbf{y})B = \sum_i B_{y_i} m_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_{y_i y_j} \mathbf{g}'_i \mathbf{g}_j + B_t + C = L(B) + B_t + C \quad (5)$$

$$\mathbf{W}'(t, T, \mathbf{y}) = \sum_i B_{y_i} \mathbf{g}_i \quad (6)$$

essendo B_{y_i} , $B_{y_i y_j}$, B_t le derivate parziali del prezzo e $L(\cdot)$ l'operatore (lineare) differenziale rispetto alle variabili di stato (operatore di Dynkin).

L'effetto prezzo della j -esima fonte d'incertezza è

$$w_j(t, T, \mathbf{y}) = \sum_i g_{ij} \frac{B_{y_i}}{B} \quad (7)$$

e quindi la varianza è una misura appropriata della rischiosità del titolo [cfr. Merton (1973a)].

Se $h(t, T, \mathbf{y})$ è una funzione nota,⁹ allora la (5) e la condizione limite in T

$$B(T, T, \mathbf{y}) = 1 \quad (8)$$

⁶ La soluzione di un'equazione differenziale stocastica di Ito è un processo continuo, markoviano, completamente caratterizzato da media e varianza istantanee (processo diffusivo). Si noti che la proprietà di Markov è implicita nelle variabili di stato, dato che, per definizione, queste veicolano, al tempo t , tutta l'informazione rilevante per la descrizione in t del sistema dinamico e quindi costituiscono la minima informazione sufficiente rispetto a cui si possono condizionare le probabilità degli stati futuri. La proprietà diffusiva implica, inoltre, che le variabili di stato abbiano distribuzione normale o derivabile dalla normale. Sui concetti di processo diffusivo, equazione differenziale stocastica di Ito e connessi si veda l'Appendice A.

⁷ L'analisi potrebbe essere estesa al caso di $M > K$ variabili di stato, di cui $M - K$ 'non stocastiche', nel senso che il relativo vettore \mathbf{g}' dipende linearmente da altre righe della matrice $\mathbf{G}\mathbf{G}'$ semidefinita positiva. Cfr. la nota 18.

⁸ Più in generale, Huang (1985, teorema 3.1) ha dimostrato che in un'economia concorrenziale con tempo e scambio continui, e operatori con aspettative diverse (purché le distribuzioni di probabilità siano 'equivalenti', cioè abbiano gli stessi insiemi di misura nulla), il sistema dei prezzi d'equilibrio è (rappresentabile con) una martingala. Se poi la struttura informativa è continua (cioè se le probabilità a posteriori si modificano in modo continuo nel tempo), i prezzi sono una martingala continua e a variazione illimitata (il viceversa è in genere falso). La ragione economica di tale risultato risiede nel fatto che se i prezzi fossero a variazione limitata, tutti i titoli risulterebbero q.s. localmente privi di rischio poiché quasi tutti i sentieri campionari sarebbero derivabili quasi dappertutto e quindi quasi sempre si conoscerebbe la direzione del movimento dei prezzi nel prossimo istante. Un caso particolare di struttura informativa continua si ha quando questa è generata da un moto browniano: in tal caso, i prezzi sono rappresentabili come integrali stocastici di Ito.

⁹ Ad esempio, l'ipotesi delle aspettative locali in forma pura eguaglia i tassi attesi di rendimento istantaneo, h , su titoli di scadenza arbitraria al tasso istantaneo r su un investimento a scadenza istantanea ($T = t$):

$$E(dP/P) = h(t, T, \mathbf{y})dt = r(t, \mathbf{y})dt \quad \forall T$$

costituiscono un problema differenziale la cui soluzione (unica) fornisce, per $C = 0$, la struttura dei prezzi e dei rendimenti dei titoli a cedola nulla in funzione delle variabili di stato e della scadenza T (*term structure*).

Tuttavia, anche senza avanzare specifiche ipotesi sulle aspettative, si può dimostrare che, in un equilibrio competitivo, $h(t, T, \mathbf{y})$ deve soddisfare una restrizione non banale. Infatti, se $r(t, \mathbf{y})$ è il tasso istantaneo su un investimento istantaneamente privo di rischio,¹⁰ la condizione di non arbitraggio¹¹ impone la relazione¹²

$$\begin{aligned} h(t, T, \mathbf{y}) &= r(t, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\lambda}'(t, \mathbf{y}) \mathbf{W}(t, T, \mathbf{y}) = \\ &= r + \sum_j \lambda_j w_j = \\ &= r + \sum_i \sum_j g_{ij} \frac{B_{y_i}}{B} = \\ &= r + \sum_i \theta_i \frac{B_{y_i}}{B} \end{aligned} \quad (9)$$

essendo θ_i , come λ_j , indipendente dalla scadenza

$$\theta_i = \sum_j \lambda_j g_{ij} \quad (10)$$

Il premio al rischio, definito dalla differenza tra tasso istantaneo atteso h e tasso istantaneo privo di rischio, r , è una funzione interpretabile come un modello lineare a K fattori [fattori di Ross (1976)], uno per ciascuna fonte d'incertezza. Ciascuna delle K componenti del premio al rischio di un titolo è pari al prodotto di una misura della quantità B_{y_i}/B dell' i -esimo tipo di rischio per una misura del prezzo di equilibrio θ_i richiesto per sopportare un'unità del medesimo tipo di rischio.

Sostituendo la (9) nella (5) si ottiene l'equazione del prezzo

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j g'_i g_j B_{y_i y_j} + \sum_i B_{y_i} (m_i - \theta_i) - rB + B_t + C = 0 \quad (11)$$

ossia

¹⁰ La non rischiosità di un titolo si può identificare con l'assenza di variazioni stocastiche nel valore capitale. Un titolo è istantaneamente non rischioso quando ciascun investitore sa con certezza di poter guadagnare il tasso di rendimento $r(t)$ detenendo il titolo per il prossimo istante. In simboli, se $H(t)$ è il prezzo corrente di tale titolo:

$$E_t[dH(t)/H(t)] = r(t)dt$$

$$Var_t[dH(t)/H(t)] = 0$$

Il fatto che il tasso istantaneo $r(t)$ segua un processo stocastico non dà luogo ad alcun rischio istantaneo: un capitale investito a tale tasso si accumulerà istantaneamente in modo non stocastico. Cfr. Merton (1973b) p. 874.

¹¹ In un modello continuo e in assenza di costi di transazione, si può definire arbitraggio la costruzione di un portafoglio finito di titoli, a quote continuamente ribilanciate in modo tale che, se $V(t)$ è il valore del portafoglio al tempo t e $dV(t)/V(t)$ è il tasso di rendimento *ex post* nell'unità di tempo, risulti

$$E_t[dV(t)/V(t)] > r(t)dt \quad (\text{premio positivo})$$

$$Var_t[dV(t)/V(t)] = 0 \quad (\text{non rischiosità istantanea})$$

essendo $r(t)$ il tasso istantaneo privo di rischio.

¹² La (9) si ottiene costruendo un portafoglio di $K + 1$ titoli a cedola nulla e scadenze distinte arbitrarie, con quote continuamente aggiustate in modo tale che il portafoglio risulti istantaneamente privo di rischio. Per la condizione di non arbitraggio, il portafoglio renderà il tasso istantaneo r e quindi esisterà una combinazione lineare di $(h - r)$ e $w_j, j = 1, \dots, K$ identicamente nulla [CIR (1981a), §1]. Si noti che, in presenza di K fonti di incertezza, lo spazio delle opportunità di investimento ha dimensione K nel senso che, dati $K + 1$ titoli, esiste sempre una combinazione lineare dei corrispondenti coefficienti di varianza, \mathbf{W}' , identicamente nulla. La (9) vale anche nel caso di titoli con cedola.

$$\hat{L}(B) - rB + B_t + C = 0 \quad (12)$$

dove $\hat{L}(\cdot)$ è l'operatore di Dynkin, L , aggiustato per il rischio nel valor medio.

La (11) è equivalente alla (5) in un sistema economico 'duale' in cui valga la forma pura dell'ipotesi delle aspettative locali (cioè l'eguaglianza di tutti i tassi attesi di rendimento istantaneo su titoli di qualunque scadenza)

$$h^* = E(dB / B) = rdt \quad (13)$$

e le aspettative m_i^* siano aggiustate per il rischio:¹³

$$m_i^* = m_i - \theta_i \quad (14)$$

La (11), che è un'equazione alle derivate parziali di secondo ordine e primo grado (lineare), parabolica, consente di ricavare - con le opportune condizioni limite - il prezzo B in funzione della dinamica delle variabili di stato, del tasso istantaneo r e dei premi al rischio, θ_i , dipendenti a loro volta dalle variabili di stato e dalle preferenze degli operatori.

L'approccio di equilibrio generale consente di specificare la forma dei premi θ_i e del tasso istantaneo r sulla base delle ipotesi su cui è fondato l'intero modello. Assumendo l'esistenza di un'unica variabile di stato e specificando opportunamente la forma delle equazioni dinamiche e della funzione di utilità CIR(1985b) ottengono un modello, empiricamente verificabile, in cui il tasso istantaneo r privo di rischio su un investimento istantaneo a pronti acquista il ruolo di variabile strumentale per la sottostante variabile di stato e per la descrizione completa dell'incertezza esogena.¹⁴ La sua dinamica risulta essere data da

$$dr(t) = b(r)dt + a(r)dz(t) \quad (15)$$

dove:

$$b(r) \equiv \beta(\mu - r) \quad (16)$$

$$a(r) \equiv \sigma\sqrt{r} \quad (17)$$

β, μ, σ sono parametri incogniti e $z(t)$ è un moto browniano standard ad una dimensione.

La dinamica di $r(t)$ è la somma, condizionata in t , di due componenti, l'una deterministica, che dà la direzione e l'ampiezza, in media, del prossimo incremento infinitesimo del processo e l'altra, stocastica, che imprime al movimento *shocks* normalmente distribuiti, mutuamente indipendenti, a media nulla e varianza pari all'incremento temporale

$$dz(t) \sim N(0, dt) \quad (18)$$

¹³ Sul concetto di valor medio aggiustato per il rischio si veda Hicks (1939, p.126).

¹⁴ Il modello semplificato di CIR assume in particolare che:

- esiste un unico bene fisico di consumo/investimento producibile mediante N processi stocastici lineari;
- la distribuzione del rendimento di un investimento reale o finanziario è indipendente dalla scala dell'investimento stesso;
- esiste un'unica variabile di stato y con dinamica

$$dy(t) = (-ay + b)dt + c\sqrt{y}\mathbf{V}'d\mathbf{Z}(t)$$

dove \mathbf{V}' è un vettore riga di unità, $\mathbf{Z}(t)$ è un processo standard di Wiener a $N+1$ dimensioni, a, b, c costanti positive;

- media e varianza istantanee dei tassi di rendimento sui processi produttivi sono funzioni lineari dell'unica variabile di stato;
- le preferenze dell'investitore rappresentativo sono date dalla funzione di utilità del consumo $C(t)$

$$U[C(t), t] = e^{-\rho t} \ln[C(t)]$$

esponenziale in t (tasso di preferenza temporale costante) e logaritmica in C (avversione al rischio relativa costante). In tali ipotesi il tasso istantaneo r risulta proporzionale a y .

Entrambi i coefficienti di deriva e varianza sono funzioni lineari del livello del tasso. Il processo descritto dalla (15) è detto eteroschedastico¹⁵ o a disturbi moltiplicativi, autoregressivo ed elastico nel senso che, per $\beta > 0$ e $\mu > 0$, il *drift* guida il processo verso un valore di lungo periodo, μ , che richiama l'ipotesi di Marshall - Keynes di regressione del tasso verso un livello normale.¹⁶ Il parametro β indica la velocità di aggiustamento del meccanismo di correzione.¹⁷

Evidentemente, la soluzione dell'equazione (15) è un processo diffusivo - e quindi markoviano - che ha quasi sicuramente traiettorie continue.¹⁸ Tale continuità implica, da un lato, che sono esclusi, nel breve periodo, mutamenti drastici delle variabili del sistema e, dall'altro, che è possibile misurare il rischio base dei titoli - vale a dire il rischio connesso alle variazioni di $r(t)$ - con la *duration*, opportunamente definita in ambito stocastico (cfr. il paragrafo 2.1).

Per $K = 1$ e $y(t) = r(t)$, il prezzo $P(t, T, r)$ di un titolo, privo di cedole e di rischio di insolvenza, che dà diritto a 1 lira in T avrà dinamica

$$dP(t, T, r) = h(t, T, r)P dt + W(t, T, r)P dz(t) \quad (19)$$

e le equazioni (5) e (6) diventano

$$h(t, T, r)P = P_r \beta(\mu - r) + P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} \quad (20)$$

$$W(t, T, r)P = P_r \sigma \sqrt{r} \quad (21)$$

Dalla (19) si ricava che i rendimenti istantanei, qualunque sia la scadenza, sono localmente perfettamente correlati, in conseguenza dell'unicità della variabile di stato e del fatto che dz è funzione del tempo t ma non della scadenza T [cfr. Merton (1973a, p. 163)].

La condizione che, in equilibrio, siano assenti opportunità di arbitraggi non rischiosi e le ipotesi sulle preferenze degli operatori consentono di scrivere

¹⁵ Si veda Vasicek (1977) per l'ipotesi di un processo omoschedastico del tipo di Ornstein-Uhlenbeck; Barone(1983) per l'ipotesi di moto "geometrico" browniano.

¹⁶ L'ipotesi di regressione del tasso d'interesse monetario verso un livello "normale" risulta più plausibile nel caso di prezzi costanti dei beni reali. Viceversa, se il prezzo del prodotto è variabile, l'analisi dei tassi monetari si potrebbe ottenere da un modello "almeno" bivariato per il tasso reale e il tasso d'inflazione [cfr. CIR (1978, §V), (1981a, §VI) e la nota 18].

¹⁷ In CIR (1978) sono analizzate le caratteristiche del processo $r(t)$ governato dalla (15). È interessante notare che, con $\beta > 0$ e $\mu > 0$, esiste per r una distribuzione di *steady state* del tipo gamma, a parametri $2\beta/\sigma^2$ e $2\beta\mu/\sigma^2$, con media e varianza

$$E[r_\infty | r(t)] = \mu$$

$$Var[r_\infty | r(t)] = \frac{\sigma^2 \mu}{2\beta}$$

¹⁸ I processi diffusivi entrano in modo naturale nella teoria del portafoglio poiché costituiscono la generalizzazione dinamica (nel continuo) dei tradizionali modelli uniperiodali media-varianza. Poiché la proprietà di Markov postula l'irrelevanza, per la dinamica futura, degli stati passati del sistema, noto il suo stato presente, si ha che, nel modello considerato, prezzi e rendimenti correnti non dipendono dal sentiero seguito dal tasso istantaneo per raggiungere il suo livello attuale. Ciò non toglie, tuttavia, la possibilità che lo stato presente sia esprimibile in funzione dei valori passati delle variabili. Ad esempio, introducendo una variabile di stato $x(t)$ che è una media esponenziale dei tassi passati

$$x(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} r(s) ds$$

si ottiene un sistema a due variabili di stato e a un'unica fonte di incertezza (un solo fattore di rischio)

$$dr = \beta(x - r)dt + \sigma \sqrt{r} dz$$

$$dx = \alpha(r - x)dt$$

in cui la media costante di lungo periodo μ della (15) è stata sostituita dalla media mobile x [cfr. CIR (1981a, §VII)].

$$h(t, T, r) = r + \theta(r) \frac{P_r}{P} = r - \pi \frac{r P_r}{P} \quad (22)$$

da cui l'equazione del prezzo

$$\frac{1}{2} \sigma^2 r P_{rr} + [\beta(\mu - r) + \pi r] P_r + P_t - r P = 0 \quad (23)$$

con la condizione limite

$$P(T, T, r) = 1 \quad (24)$$

Si può dimostrare che la soluzione è data da¹⁹

$$P(t, T, r) = F(T-t) e^{-r(t)G(T-t)} \quad (25)$$

dove F e G sono funzioni della vita residua $T-t$, date da

$$F(T-t) = \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\beta-\pi)\left(\frac{T-t}{2}\right)}}{(\gamma+\beta-\pi)[e^{\gamma(T-t)}-1] - 2\gamma} \right]^{\frac{2\beta\mu}{\sigma^2}} \quad (26)$$

$$G(T-t) = \frac{2[e^{\gamma(T-t)}-1]}{(\gamma+\beta-\pi)[e^{\gamma(T-t)}-1] + 2\gamma} \quad (27)$$

$$\gamma = \sqrt{(\beta-\pi)^2 + 2\sigma^2} \quad (28)$$

e tali che, per $\tau = T-t$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = G_\tau = 1 - (\beta - \pi)G - \frac{\sigma^2}{2} G^2 \quad (29)$$

$$\frac{\partial F / \partial \tau}{F} = \frac{F_\tau}{F} = -\beta \mu G \quad (30)$$

Dalla soluzione per i prezzi (25) si ottiene la struttura per scadenza dei rendimenti, definita da

$$R(t, T, P) = \frac{-\ln[P(t, T, r)]}{T-t} = \frac{rG - \ln(F)}{T-t} \quad (31)$$

tale che $R \rightarrow r$ per $T \downarrow t$ (titoli a scadenza istantanea) e $R \rightarrow R_\infty$ per $T \uparrow \infty$ (titoli irredimibili).

In t , il prezzo a termine di un titolo a cedola nulla e rimborso unitario con compravendita in s e scadenza in T ($t \leq s \leq T$), è dato da [cfr. CIR (1981b)]

$$Q(t, S, T) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)} = \frac{F(T-t)}{F(S-t)} e^{-r[G(T-t)-G(S-t)]} \quad (32)$$

Il tasso a termine è dato da

¹⁹ La soluzione si può ottenere col metodo dei coefficienti indeterminati assumendo

$$P(\tau, r) = e^{A(\tau)r + B(\tau)} \quad \tau = T-t$$

ricavando $A(0)$, $B(0)$, P_r , P_{rr} , P_τ sostituendo nella (23), notando che la relazione lineare in r ottenuta si annulla identicamente se e solo se coefficiente e intercetta sono identicamente nulli, e risolvendo infine per $A(\tau)$ e $B(\tau)$.

$$R_f(t, S, T) = \frac{-\ln(Q)}{T-S} = \frac{(T-t)R(t, T, P) - (S-t)R(t, S, P)}{T-S} \quad (33)$$

Per $s \uparrow T$ si ottiene il tasso istantaneo vigente in t su un investimento a termine di durata istantanea e scadenza in T

$$r_f(t, T) = \frac{-P_T}{P} = r G_T - \frac{F_T}{F} \quad (34)$$

Essendo

$$E_t[r(t)] = r(t)e^{-\beta\tau} + \mu(1 - e^{-\beta\tau}) \quad \tau = T - t \quad (35)$$

ne segue che la formulazione dell'ipotesi delle aspettative in termini di eguaglianza tra tasso *forward* e valore atteso del tasso *spot* futuro non è compatibile con l'ipotesi delle aspettative in termini di rendimenti immediati.²⁰

2.1 Vita residua, duration e rischio

A partire dall'analisi di Hicks (1939) - ma si può risalire a I. Fisher (1896) - la causa primaria del rischio connesso alle fluttuazioni dei prezzi dei titoli è individuata nei movimenti dei tassi d'interesse: si parla in tal caso di rischio base di un titolo.²¹ Per un dato spostamento della curva dei rendimenti, la variazione del prezzo di un titolo a tasso fisso, e quindi la misura del suo rischio base, sarà non solo in funzione diretta della vita residua del titolo ma anche in funzione inversa dei flussi di reddito $C(t)$ attivati dallo stacco delle cedole alle date di godimento. Ciò deriva dall'ovvia considerazione che, a parità di altre circostanze, un maggior tasso d'interesse nominale (o facciale) comporta una più elevata intensità d'ammortamento del capitale investito. In altre parole, una variazione *ceteris paribus* dei rendimenti determinerà più ampie variazioni nei prezzi dei titoli di più lunga scadenza e più ridotte variazioni nei prezzi dei titoli a più alta cedola.

La *duration*, già nell'originaria definizione di Macaulay (1938), intende riassumere, in una misura omogenea con la scadenza $\tau = T - t$, la distribuzione dei *cash flows* attesi da un titolo a cedola prefissata:

$$D_1(\tau) = \frac{\sum_{s=0}^{\tau} s C(s) P(s)}{\sum_{s=0}^{\tau} C(s) P(s)} \quad (36)$$

²⁰ Il risultato è generale (cfr. nota 5). In particolare, la differenza tra il tasso istantaneo a termine $r_f(t, T)$ e il valore atteso condizionato del tasso istantaneo *spot* futuro $E[r(T)|r(t)]$, dato dalla (35), risulta crescente con π e (in valore assoluto) con τ e decrescente al crescere di σ^2 . Tale differenza esprime il premio contenuto nel tasso *forward* richiesto per compensare la rischiosità connessa alle operazioni sul mercato a termine. Per σ^2 sufficientemente elevato e/o per π sufficientemente prossimo a 0, essa può cambiare segno e quindi la condizione di equilibrio richiederà uno sconto sul termine a causa dell'accresciuta imprecisione dell'aspettativa e/o del ridotto extra-rendimento per unità di rischio.

Poiché il segno della derivata della curva dei rendimenti è il segno della differenza tra il tasso *forward* e il tasso di rendimento a scadenza

$$\text{sign}\left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right) = \text{sign}[r_f(t, \tau) - R(t, \tau)]$$

ne segue che esso è anche il segno del *forward premium* più lo scarto tra $E[r(T)|r(t)]$ e $R(t, \tau)$. Infatti, alcuni esercizi di statica comparata condotti nel paragrafo 3 mostrano *term structures* non monotone cui corrispondono, tuttavia, premi di segno costante al crescere di τ .

²¹ In un approccio d'equilibrio generale è tautologico parlare dei variazioni dei prezzi dei titoli determinate dalle fluttuazioni dei tassi d'interesse, essendo i tassi d'interesse un'espressione equivalente a prezzi relativi degli *assets*. Si veda Marschak (1938, p. 321) e Hicks (1939, p. 154). Nel modello in esame, essendo il tasso a breve proporzionale all'unica variabile di stato, l'affermazione è significativa.

dove $P(s)$ è un fattore di sconto.

In generale, tale fattore $P(s)$ non è che il valore attuale di un'unità monetaria disponibile tra s unità di tempo, $P(s) = e^{-R(s)s}$ e quindi la *duration* D_1 si può ricavare correttamente solo dall'intera struttura dei rendimenti per scadenza tra 0 e τ .

Ai fini pratici si fa spesso ricorso alla formula:

$$D_2(\tau) = \frac{\sum_{s=0}^{\tau} s C(s) e^{-ys}}{\sum_{s=0}^{\tau} C(s) e^{-ys}} \quad (37)$$

dove y è il rendimento alla scadenza, conoscibile, per i titoli a tasso fisso, a partire dal prezzo d'acquisto e dai pagamenti contrattuali, come soluzione (valor medio funzionale) dell'equazione

$$B = \sum_{s=0}^{\tau} C(s) e^{-R(s)s} = \sum_{s=0}^{\tau} C(s) e^{-ys} \quad (38)$$

Si noti che solo nell'ipotesi di tassi costanti si ha $r(t) = R(\tau, r) = y$ e $D_1 = D_2$.

Dalle equazioni (36)-(37) si ricavano le note proprietà per cui:

- la *duration* di un titolo a cedola nulla è la vita residua;
- la *duration* di un portafoglio di titoli è la media aritmetica ponderata delle *durations* dei titoli in portafoglio;
- la variazione percentuale del prezzo di un titolo al variare del rendimento alla scadenza è proporzionale alla *duration*

$$\frac{dB}{B} = -D_2 dy \quad (39)$$

Tali proprietà rimandano ad altrettanti usi correnti delle misure di durata ai fini di:

- caratterizzare temporalmente il flusso di pagamenti cui dà luogo un titolo [*the time element of a loan*, Macaulay (1938, p. 44)];
- quantificare il legame tra variazioni nei tassi d'interesse e variazione nel valore attuale di un capitale [*the elasticity with respect to the discount ratio*, Hicks (1939, p.186)];
- guidare nella costruzione di portafogli di attività e passività in cui sia minimo (nullo) il rischio base e garantito il rendimento su un prefissato periodo di detenzione [*immunization*, Redington (1952)].

Tuttavia l'uso delle misure tradizionali di durata come indicatori di rischio ha validità circoscritta a ipotesi particolari. In primo luogo, è facile riconoscere che la (37) non dà una misura soddisfacente del rischio base: nonostante la (39), una variazione dR della curva dei rendimenti non influenza proporzionalmente alla durata D_2 i prezzi dei titoli a tasso fisso poiché, in generale, i corrispondenti rendimenti alla scadenza subiscono variazioni dy non uniformi, in funzione dei pagamenti cedolari. Se e solo se la struttura per scadenza è orizzontale [$r(t) = R(\tau, r) = y$] una variazione dR darà luogo ad una variazione uniforme dei rendimenti alla scadenza su tutti i titoli con cedola fissa e quindi D_2 sarà una misura appropriata del rischio base [Ingersoll, Skelton e Weil (1978, teorema 1)].

In secondo luogo, la *duration* nella definizione generale di Macaulay, (36), sarà proporzionale alla variazione percentuale del prezzo dei titoli se e solo se la curva dei rendimenti subisce una variazione uniforme e additiva $dR(\cdot) = \overline{dR}$, nel qual caso [Ingersoll, Skelton e Weil (1978, teorema 1)] si ha

$$\frac{dB}{B} = -D_1 \overline{dR} \quad (40)$$

Tale variazione uniforme, inoltre, deve essere (quasi sicuramente) infinitesima (il che è assicurato se i rendimenti sono processi diffusivi) poiché variazioni uniformi, ma non infinitesime, della curva dei

rendimenti sono incompatibili con l'equilibrio, implicando la possibilità di arbitraggi non rischiosi [Ingersoll, Skelton e Weil (1978, teorema 4)].²²

In alternativa alle misure tradizionali D_1 e D_2 , si ha che $-P_r/P$ è la metrica corretta per valutare il rischio base di un titolo a cedola nulla e rimborso unitario alla scadenza e dal modello precedente (25) si avrà²³

$$\frac{-P_r}{P} = G(\tau) \quad (41)$$

e in generale, se $B(\tau, r)$ è il prezzo di un titolo con cedole certe $C(\tau)$, $-B_r/B$ è la metrica corretta per valutare il rischio connesso alle fluttuazioni dei tassi.

Volendo ottenere una misura di durata omogenea col tempo, si può far corrispondere, nel caso dei titoli a cedola nulla, a $G(\tau)$ la vita residua τ , in accordo con la *duration* classica:

$$G^{-1}\left(-\frac{P_r}{P}\right) = G^{-1}[G(\tau)] = \tau \quad (42)$$

Per analogia si può definire la *duration* stocastica [CIR (1979, p. 56)] di un titolo a pagamenti certi discreti come la vita residua di un titolo a cedola nulla con il medesimo rischio:

$$D_3 = G^{-1}\left(-\frac{B_r}{B}\right) = G^{-1}\left[\frac{-\sum C(s)P_r(s)}{C(s)P(s)}\right] = G^{-1}\left[\frac{\sum C(s)P(s)G(s)}{\sum C(s)P(s)}\right] \quad (43)$$

dove

²² In particolare, nelle ipotesi del paragrafo 2, se il tasso *spot* istantaneo è un processo diffusivo governato dall'equazione di Ito

$$dr = b(r)dt + a(r)dz$$

[di cui la (15) è una specificazione] la curva dei rendimenti subisce una variazione infinitesima uniforme se e solo se

$$a(r) = a$$

$$b^*(r) = b(r) - \phi(r) = b^*$$

con a e b^* costanti e $\theta(r)$ prezzo di mercato del rischio base. Se

$$b(r) = \beta(\mu - r)$$

e

$$\theta(r) = -\pi r$$

la *duration* D_1 misura il rischio base se e solo se la variabile di stato $r(t)$ e le preferenze degli operatori sono tali che la varianza istantanea a^2 è costante e $\beta = \pi$. Si noti che, in caso di grandezze nominali, un processo diffusivo a parametri costanti (moto browniano non standard)

$$dr = bdt + adz$$

non è significativo dal punto di vista economico implicando sia probabilità positive di tassi negativi, sia prezzi dei titoli tendenti ad infinito anziché a 0 al crescere della vita residua. Il processo di Ornstein-Uhlenbeck (stazionario, a incrementi correlati) soluzione di

$$dr = \beta(\mu - r)dt + adz$$

condivide la prima caratteristica ma non la seconda. Cfr. Merton (1973a) e Vasicek (1977).

²³ In generale occorre assumere l'invertibilità della funzione

$$-\frac{P_r(t, T, r)}{P(t, T, r)}$$

rispetto a T . Nel caso di K variabili di stato $y(t)$, P_y/P è un vettore a K dimensioni e il concetto di *duration* stocastica non è immediatamente estendibile. Si ha

$$\frac{P_y}{P} = \frac{P_r}{P} \frac{\partial r}{\partial y}$$

dove $\partial r/\partial y$ è un vettore di costanti se e solo se r è funzione lineare a coefficienti costanti, delle variabili di stato.

$$G^{-1}(x) = 2 \coth^{-1} \left[\frac{2}{\gamma x} + \frac{\pi - \beta}{\gamma} \right] = \frac{1}{\gamma} \ln \left[\frac{2 + x(\pi - \beta) + \gamma x}{2 + x(\pi - \beta) - \gamma x} \right] \quad (44)$$

2.2 I titoli a tasso variabile

Nei titoli a tasso fisso l'interesse da corrispondere viene determinato al momento dell'emissione mentre nei titoli a tasso variabile esso viene determinato sulla base dei tassi correnti al fine di stabilizzare il prezzo del titolo.

Le modalità di determinazione dei pagamenti di un titolo a tasso variabile, che conducono ad una sua corretta immunizzazione dalle variazioni dei tassi d'interesse, sono state esaminate da CIR (1980).

Nel caso, analizzato nel paragrafo 2, di un modello con un'unica variabile di stato, l'equazione del prezzo $B(\tau, r)$ di un titolo con cedole $C(\tau, r)$ è la seguente

$$\frac{1}{2} a^2(r) B_{rr} + [b(r) + \pi r] B_r + B_t + C - r B = 0 \quad (45)$$

dove i primi due termini misurano la variazione attesa del prezzo del titolo, aggiustata per il rischio, e possono essere compendiate nel termine $\hat{L}(B)$.

Al fine di eliminare le possibilità di arbitraggi questa equazione deve essere soddisfatta da tutti i titoli, per qualsiasi scadenza e per qualsiasi struttura delle cedole $C(\tau, r)$.

Cedole continue

Il più semplice contratto a tasso variabile è un titolo privo del rischio di insolvenza con valore nominale unitario e cedole, pagate in modo continuativo, che vengono aggiornate al valore corrente del tasso d'interesse istantaneo r . In tal caso $C(\tau, r) = r$ e quindi l'equazione (45) diventa

$$\hat{L}(B) + B_t + r - r B = 0 \quad (46)$$

ed è soggetta al vincolo che alla scadenza B sia uguale a 1. Poiché il generatore differenziale include solo derivate parziali di B , una soluzione evidente è data da:

$$B = 1 \quad (47)$$

che soddisfa, ovviamente, anche la condizione finale.

Il valore di questo titolo è quindi costante dal momento che il rischio base, che è, per ipotesi, l'unica fonte di incertezza, è stato eliminato con l'aggiustamento istantaneo della cedola al tasso d'interesse corrente.

Come si può notare, è il tasso d'interesse a breve che deve essere usato per determinare le cedole quale che sia la scadenza del contratto. Se venisse usato un qualsiasi tasso a lunga il valore del titolo dipenderebbe dalla relazione funzionale tra i due tassi e, a meno che non esista tra questi una relazione proporzionale costante, la proprietà di immunizzazione verrebbe persa.

Cedole discrete determinate alle date di pagamento

Se le cedole vengono pagate solo ad istanti di tempo discreti, il meccanismo richiesto per eliminare il rischio base diviene più complesso poiché il tasso a breve varia in modo continuo. Tuttavia l'immunizzazione è ancora possibile. Se t_0 è la data dell'emissione o dell'ultimo pagamento e t_1, t_2, \dots, t_n sono le date dei pagamenti futuri, la somma appropriata da pagare al tempo t_i per eliminare il rischio base è

$$C(t_i) = \exp \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} r(t) dt \right] - 1 \quad (48)$$

pari cioè all'interesse che si sarebbe ottenuto, nell'intervallo tra due cedole, investendo la somma originale 1 in una serie di titoli che fruttino il tasso istantaneo. Corrispondentemente, il prezzo del titolo è dato da (v. l'Appendice B):

$$B(t) = \exp\left[\int_{t_0}^t r(s) ds\right] \quad (49)$$

Per determinare il valore corrente di questo titolo è quindi necessario e sufficiente conoscere il sentiero temporale del tasso r dal momento dell'ultimo pagamento. Il valore del titolo sarà pari al valore nominale più la parte maturata della cedola successiva, indipendentemente dalle aspettative circa i tassi futuri. Non è possibile prevedere perfettamente il prezzo di un titolo così costruito, in tutti i futuri istanti di tempo; tuttavia ad ogni data di pagamento degli interessi il prezzo del titolo quotato ex-cedola sarà pari al suo valore nominale.

Cedole discrete determinate prima delle date di pagamento

I due titoli, a cedole continue e a cedole discrete, menzionati in questo paragrafo eliminano completamente il rischio base ma non sono praticabili per varie ragioni. Il costo connesso alla definizione e alla misurazione del tasso d'interesse istantaneo e quello connesso alla sua rilevazione continua è assai alto. Inoltre si ostacolerebbe la gestione dei flussi di cassa dal momento che ogni pagamento a titolo d'interesse sarebbe incerto fino al giorno in cui esso è dovuto.

Per ridurre questi problemi ogni cedola deve essere determinata in anticipo. Agli estremi si possono avere titoli con cedole determinate nelle stesse date di pagamento (con conseguente possibilità di annullamento del rischio base) e cedole determinate alla data d'emissione (è il caso degli ordinari titoli a reddito fisso). In genere, più breve è l'intervallo tra la data in cui la cedola viene determinata e quella in cui essa è pagata, più piccolo è il rischio base del titolo.

Si ipotizzi ora che ogni cedola venga determinata Δ unità di tempo prima di essere pagata e che la periodicità dei pagamenti sia pari a δ . Una scelta logica è che la cedola sia posta pari al tasso corrente in $t_i - \Delta$ per la scadenza δ , ossia

$$C(t_i) = \frac{1}{P(t_i - \Delta, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \quad (50)$$

dove $P(t_i - \Delta, t_i - \Delta + \delta)$ è il valore al tempo $t_i - \Delta$ di un *discount bond* con scadenza al tempo $t_i - \Delta + \delta$. Nota la dinamica delle variabili determinanti la *term structure* [$r(t)$ nel caso presente], il titolo può essere valutato sulla base di un opportuno valor medio condizionato (v. l'Appendice B).

Nel caso in cui le cedole vengano determinate al tempo in cui sono pagate le cedole precedenti ($\Delta = \delta$) il problema si semplifica ulteriormente e il valore del titolo, in ogni istante, è dato da

$$B(t) = \frac{P(t, t_i)}{P(t_{i-1}, t_i)} \quad t_{i-1} \leq t < t_i \quad (51)$$

Come per il caso del titolo con cedole discrete determinate alle date di pagamento, questo titolo, appena privo della cedola ($t = t_{i-1}$), quoterà alla pari ($B = 1$). A differenza del titolo precedente rimane però un certo rischio base. Poiché, nella (51), la frazione $1/P(t_{i-1}, t_i)$ è costante per $t \geq t_{i-1}$, il prezzo di questo titolo è strettamente proporzionale al prezzo $P(t, t_i)$ di un *discount bond* che scade alla data t_i . Esso ha quindi lo stesso rischio base del *discount bond* di durata pari a $t_i - t$: il rischio del titolo a tasso variabile non è quindi costante nell'intervallo tra successivi pagamenti, ma decresce all'avvicinarsi della data successiva di pagamento.

Per $\Delta > \delta$, la cedola (50) può essere approssimata sostituendo a $P(t_i - \Delta, t_i - \Delta + \delta)$ il prezzo *forward* corrente ottenendo

$$C(t_i) = \frac{1}{Q(t, t_i - \Delta, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \quad (52)$$

da cui, se \bar{R} è il tasso della prima cedola,

$$B(t) = (e^{\bar{r}} - 1)P(t, t_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[\frac{P(t, t_i - \Delta)}{P(t, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \right] P(t, t_i) + \frac{P(t, t_n - \Delta)}{P(t, t_n - \Delta + \delta)} P(t, t_n) \quad (53)$$

La *duration* stocastica

$$D_3 = G^{-1} \left(\frac{-B_r}{B} \right) \quad (54)$$

fornirà, come nel caso dei titoli a cedola fissa, la scadenza di un *zero-coupon bond* col medesimo rischio del titolo a tasso variabile. Essa si configura come la misura corretta del rischio base anche per i titoli a indicizzazione finanziaria.

Naturalmente, quanto più lontana è la data di scadenza di un titolo, tanto maggiore è l'importanza che vengono ad assumere i fattori diversi dal rischio base.

Infatti - come si è notato - il rischio inerente alle fluttuazioni dei prezzi dei titoli ha più d'una dimensione, comprendendo, oltre al rischio base, il rischio d'insolvenza (per i titoli del debito privato), il rischio d'inflazione, il rischio di cambio, il rischio di illiquidità (in funzione delle dimensioni del mercato, dei costi di transazione, dell'imposizione fiscale), il rischio circa il grado di rappresentatività della variabile di riferimento nelle indicizzazioni,²⁴ nel caso dei titoli di Stato il rischio connesso alla sovranità legislativa del debitore-emittente (che ha il potere di modificare i termini del contratto), ecc.. Ciò significa che, per i titoli a lunga scadenza, una valutazione del rischio complessivo non può prescindere da un'analisi delle componenti diverse dal rischio base la cui misura, fornita dalla (54), è da considerarsi più una soglia minima del rischio totale che un'approssimazione.

3. UN'APPLICAZIONE DEL MODELLO DI COX, INGERSOLL E ROSS AL CASO ITALIANO

3.1 Stima della dinamica del tasso a breve: giugno '81 - novembre '84

Una stima dei parametri che guidano la dinamica del tasso a breve (β, μ, σ) si può ottenere alternativamente dalla (15) ovvero dall'equazione differenziale che esprime la dinamica del tasso di rendimento osservabile $R(\bar{r}, r)$, per un dato \bar{r} , equazione ottenibile dalla (31) via lemma di Ito.²⁵

Quando non esiste un tasso istantaneo (es. a 24 ore) osservabile, o questo non è sufficientemente rappresentativo delle condizioni di mercato, la stima mediante l'ultima equazione è l'unica ineccepibile.

Per semplicità, e a fini puramente esemplificativi, si può assumere come tasso a breve non rischioso il rendimento a scadenza sui BOT a tre mesi;²⁶ tale tasso, che è quello maggiormente rappresentativo nel comparto dei titoli a più breve termine, è stato osservato mensilmente tra il giugno 1981 e il novembre 1984.

La forma discreta approssimativamente equivalente alla (15) è data da²⁷

²⁴ Una variabile si può definire "rappresentativa delle condizioni del sistema" se è funzione certa invertibile delle variabili di stato.

²⁵ Sulla stima econometrica delle equazioni differenziali stocastiche lineari a coefficienti costanti si veda ad esempio Wymer (1972), Sargan (1974), Phillips (1976), Gandolfo, Martinengo e Padoan (1981). Al riguardo, si noti che il moto browniano si può scrivere nel modo seguente

$$dz(t) = \xi(t) dt$$

dove $\xi(t)$ è un processo continuo *white noise* normale ed è la derivata in senso generalizzato [Yaglom (1962)] del moto browniano.

²⁶ La semplificazione del tasso sui titoli del debito pubblico a breve come tasso non rischioso è assai comune nella letteratura [cfr. Merton (1973b, pag. 874)]. Ne segue che le misure di rischiosità che si otterranno, non saranno quantità assolute ma misure riparametrate rispetto ad un punto di riferimento non nullo, ma presumibilmente prossimo a zero, dato dal rischio base dei BOT a tre mesi. In ogni caso l'analisi empirica della parte seconda vuole essere semplicemente un'illustrazione delle possibilità operative del modello teorico e non una verifica a posteriori della sua validità.

²⁷ La forma discreta (55) si ottiene dalla (15) ricavando l'equazione differenziale per la trasformata $\sqrt{r(t)}$ - eliminando così l'eteroschedasticità della componente stocastica - e linearizzando il *drift* ottenuto intorno al valor medio $\sqrt{\bar{r}}$.

$$\sqrt{r_t} = a_0 + a_1 \sqrt{r_{t-1}} + u_t \quad (55)$$

dove

$$a_0 = \frac{2\sqrt{\tilde{r}}(4\beta\mu - \sigma^2)}{\sigma^2 - 4\beta\sqrt{\tilde{r}} - 4\beta\mu} \quad (56)$$

$$a_1 = \exp \left[\frac{-4\beta\sqrt{\tilde{r}}^2 - 4\beta\mu + \sigma^2}{8\sqrt{\tilde{r}}^2} \right] \quad (57)$$

$\sqrt{\tilde{r}}$ è la media campionaria della variabile dipendente;
 u è un errore in approssimazione lineare di tipo *white noise* (omoschedastico, serialmente non correlato, a media nulla) normale con

$$Var(u_t) = s^2 = \frac{\sigma^2}{4} \frac{(a_1^2 - 1)}{2 \ln(a_1)} \quad (58)$$

La stima OLS della (55) fornisce (in parentesi gli intervalli di confidenza asintotici al 95 per cento)²⁸

$$\sqrt{r_t} = \begin{matrix} 0,0060886 \\ (-0,015; +0,027) \end{matrix} + \begin{matrix} 0,96714 \\ (0,863; 1,072) \end{matrix} \sqrt{r_{t-1}}$$

$$\begin{array}{ll} RSQ = 0,898 & RSQC = 0,895 \\ H = 0,31565 & m.s.l. \cong 0,75 \text{ per il test bilaterale} \\ JB = 4,3232 & m.s.l. \cong 0,12 \\ F_{2,37}(1983,05) = 1,6415 & m.s.l. \cong 0,22 \end{array} \quad (59)$$

dove H è il test di Durbin sull'autocorrelazione del primo ordine nei residui, JB è il test asintotico di normalità secondo Jarque e Bera (1980), F è il test di Chow sulla stabilità dei parametri nei sottoperiodi (81.06 - 83.04) e (83.05 - 84.11), quest'ultimo caratterizzato da aste competitive di aggiudicazione dei BOT a tre mesi, $m.s.l.$ è il livello marginale di significatività del *test* corrispondente, cioè la minima probabilità condizionata di errore nel rifiutare l'ipotesi sotto *test* sulla base dell'evidenza empirica.

Si ricavano così le stime dei parametri (tra parentesi i valori annualizzati)

$$\begin{array}{ll} \hat{\beta} = 0,036529 & \\ \hat{\sigma} = 0,000051788 = 5,1788E-5 & (8,2861E-4) \\ \hat{\mu} = 0,034989 & (13,99 \text{ per cento}) \end{array} \quad (60)$$

che indicano, da un lato, una bassa velocità di aggiustamento del tasso al livello medio di lungo periodo e, dall'altro, una deviazione standard media ($r = \mu$) annua di 108 punti base:

$$\sigma\sqrt{\mu} = 0,0013461 \quad (0,010769) \quad (61)$$

In questo approccio semplificato, in cui il tasso sui BOT a 3 mesi è assunto rappresentativo del tasso istantaneo $r(t)$, una stima del coefficiente π nel prezzo del rischio base si può ricavare minimizzando rispetto a π la somma dei quadrati degli scarti

²⁸ Nel periodo limitato sotto osservazione, il processo generativo del tasso sui BOT non sembra significativamente diverso da una *random walk*.

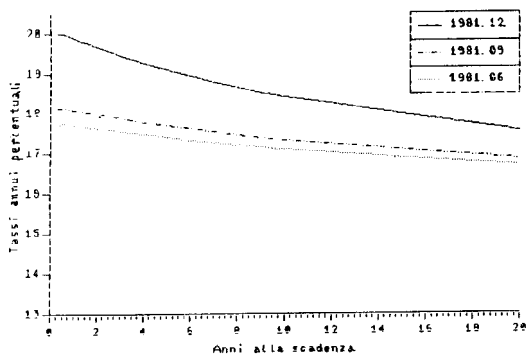


Figura 1 Struttura dei rendimenti alla scadenza (1981)

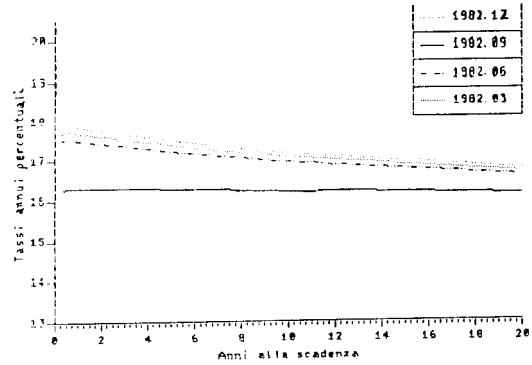


Figura 2 Struttura dei rendimenti alla scadenza (1982)

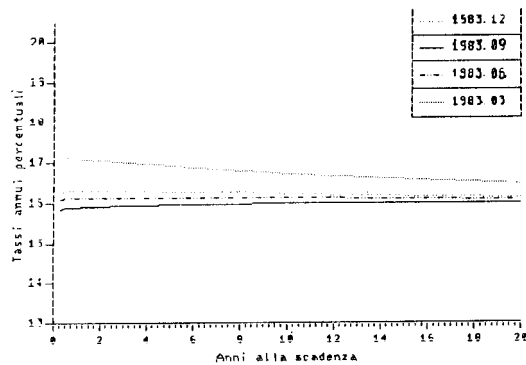


Figura 3 Struttura dei rendimenti alla scadenza (1983)

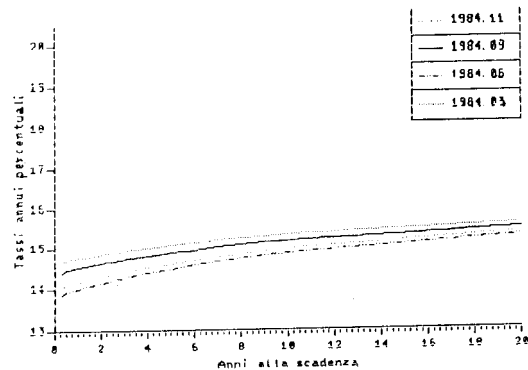


Figura 4 Struttura dei rendimenti alla scadenza (1984)

$$\sum_i \sum_{\tau} [R(t, \tau) - R(t, \tau, r, \hat{\pi})]^2 \quad (62)$$

dove $R(t, \tau)$ è il rendimento alla scadenza dei BOT a 6 e 12 mesi (cioè per $\tau = 2$ e $\tau = 4$) osservato sul mercato e $R(t, \tau, r, \pi)$ è l'equivalente teorico.

Minimizzando la (62) in π per tentativi, ovvero ricorrendo a un algoritmo di Gauss-Newton per i minimi quadrati non lineari, si giunge alla medesima stima:

$$\hat{\pi} = 0,00530 \quad (63)$$

da cui, in base alla (31)

$$R_{\infty} = 0,039895 \quad (15,958 \text{ per cento}) \quad (64)$$

3.2 La term structure per i BOT e le misure di durata per i titoli a tasso fisso

Sulla base dei parametri stimati nella precedente esemplificazione, l'evoluzione della *term structure* (tassi nel continuo) tra il 1981 e il 1984 è risultata quella rappresentata in quattro figure (Figura 1 - Figura 4).

Il raffronto intertemporale mette in luce due aspetti di tale evoluzione: in primo luogo si nota che da una struttura marcatamente decrescente nel 1981 si è passati ad una struttura crescente. Il punto di *twist* sembra potersi collocare ai primi del 1984, dopo una seconda parte del 1983 dominata da una *term structure* approssimativamente piatta attorno al valore del tasso a scadenza infinita (15,958 per cento); in secondo luogo si nota un progressivo ridursi del livello dei tassi ed in particolare di quelli a breve scadenza, sottoposti a maggiori pressioni verso il basso che li hanno ridotti dal 20 al 14 per cento circa.

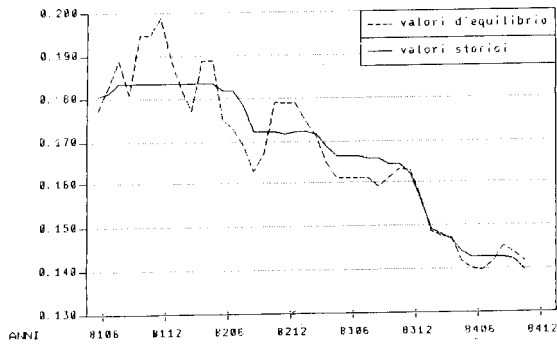


Figura 5 Tassi dei BOT a 12 mesi

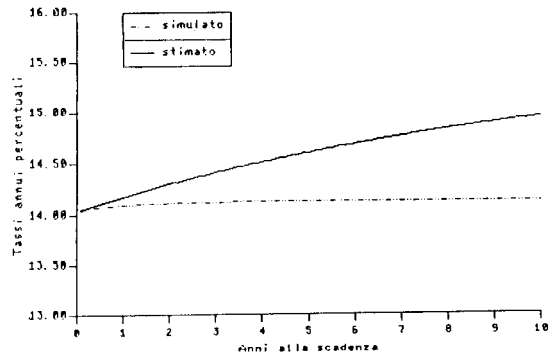


Figura 6 Term structure (nov. 84): $\beta = 0,5$

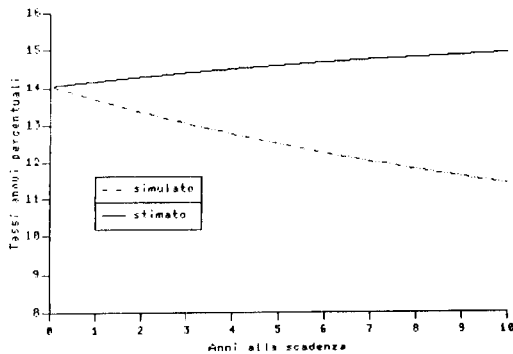


Figura 7 Term structure (nov. 84): $\mu = 0,0175$ (7%)

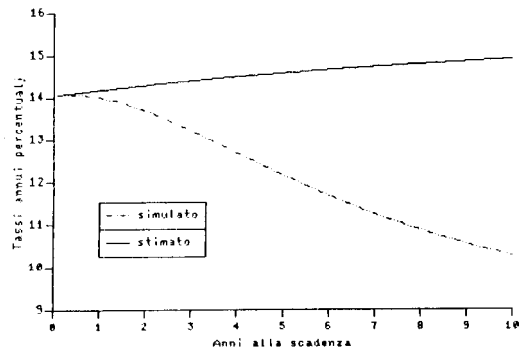


Figura 8 Term structure (nov. 84): $\sigma^2 = 0,0051788$ (0,083)

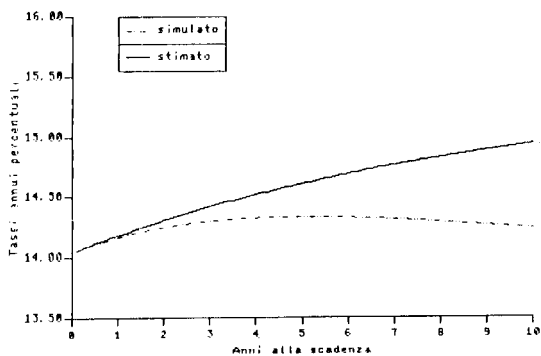


Figura 9 Term structure (nov. 84): $\sigma^2 = 5,1788E-4$ (0,0083)

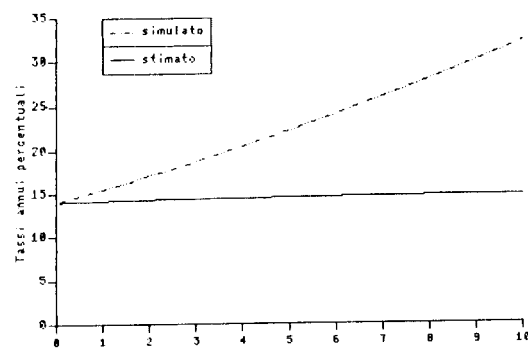


Figura 10 Term structure (nov. 84): $\pi = 0,053$

La Figura 5 mette a confronto il tasso sui BOT a 12 mesi con l'analogo tasso d'equilibrio, ricavato dalla *term structure*, nel periodo di stima giugno '81 - novembre '84.

Il tasso storico mostra gli effetti di un'accurata politica di stabilizzazione dei corsi da parte delle autorità monetarie attorno ad un *trend* di crescita coerente con gli andamenti del tasso guida (3 mesi). Lo smussamento nei due sensi delle punte di variabilità del tasso di equilibrio mostra, in un contesto di operatori 'razionali', il vantaggio informativo (*inside information*) e quindi previsivo delle autorità monetarie [cfr. Muth (1961, pp. 315-317)].

Naturalmente, parte degli scarti tra valori d'equilibrio e valori storici sono anche in funzione dei limiti esplicativi del modello teorico adottato ed in particolare dell'assenza di una stilizzazione dei fattori diversi dal rischio base, quali il rischio d'inflazione e il rischio di illiquidità (derivante da costi di transizione, dimensione del mercato, imposizione fiscale). Ad esempio, gli scarti per difetto che presenta la curva teorica attorno al settembre 1982 si potrebbero ricondurre, verosimilmente, all'incapacità del modello di tener conto di un premio al rischio richiesto dal mercato, in quell'occasione, per il diffondersi di voci di consolidamento delle scadenze dei titoli del debito pubblico.

TAVOLA 1 Duration di titoli con cedola fissa (anni)

Anni alla scadenza	Cedola 8%			Cedola 12%			Cedola 16%		
	D_1	D_2	D_3	D_1	D_2	D_3	D_1	D_2	D_3
				$\beta = 0$	$\mu = 8\%$				
3	2,12	2,73	2,73	2,63	2,63	2,63	2,55	2,55	2,55
5	4,21	4,21	4,22	3,98	3,99	3,99	3,81	3,81	3,82
7	5,48	5,48	5,48	5,12	5,12	5,12	4,87	4,87	4,87
10	7,04	7,04	7,04	6,51	6,51	6,51	6,17	6,17	6,17
15	8,93	8,93	8,90	8,24	8,24	8,22	7,84	7,84	7,82
20	10,23	10,20	10,14	9,50	9,48	9,43	9,10	9,08	9,04
				$\beta = 0$	$\mu = 12\%$				
3	2,71	2,71	2,71	2,60	2,60	2,60	2,52	2,52	2,52
5	4,13	4,13	4,13	3,89	3,89	3,89	3,71	3,71	3,71
7	5,27	5,28	5,28	4,90	4,90	4,90	4,64	4,64	4,64
10	6,54	6,55	6,54	6,02	6,02	6,02	5,69	5,69	5,69
15	7,78	7,78	7,76	7,18	7,18	7,16	6,83	6,83	6,82
20	8,38	8,36	8,32	7,84	7,81	7,79	7,54	7,52	7,50
				$\beta = 0$	$\mu = 16\%$				
3	2,69	2,69	2,69	2,58	2,58	2,58	2,49	2,49	2,49
5	4,04	4,04	4,04	3,79	3,79	3,79	3,60	3,60	3,61
7	5,05	5,05	5,06	4,66	4,67	4,67	4,40	4,41	4,41
10	6,02	6,03	6,03	5,51	5,52	5,52	5,20	5,21	5,21
15	6,69	6,69	6,67	6,18	6,19	6,18	5,91	5,91	5,90
20	6,81	6,78	6,78	6,44	6,42	6,41	6,24	6,23	6,22
				$\beta = 0,5$	$\mu = \hat{\mu}$				
3	2,70	2,70	2,55	2,59	2,59	2,41	2,51	2,51	2,30
5	4,09	4,09	3,39	3,84	3,84	3,11	3,66	3,66	2,92
7	5,17	5,17	3,65	4,79	4,79	3,34	4,53	4,53	3,15
10	6,30	6,30	3,64	5,77	5,78	3,38	5,45	5,46	3,24
15	7,23	7,23	3,49	6,67	6,68	3,35	6,37	6,37	3,28
20	7,52	7,52	3,39	7,07	7,08	3,32	6,83	6,84	3,29
				$\beta = \hat{\beta}$	$\mu = \hat{\mu}$				
3	2,70	2,70	2,69	2,59	2,59	2,58	2,51	2,51	2,49
5	4,09	4,09	4,05	3,84	3,84	3,80	3,66	3,66	3,61
7	5,17	5,17	5,07	4,78	4,78	4,68	4,52	4,53	4,42
10	6,29	6,29	6,06	5,76	5,77	5,54	5,44	5,45	5,23
15	7,21	7,22	6,73	6,66	6,66	6,22	6,35	6,36	5,95
20	7,51	7,51	6,83	7,06	7,06	6,46	6,82	6,83	6,27

Le figure successive (Figura 6 - Figura 10) riassumono i risultati di quattro esercizi di simulazione in cui si mette a confronto la *term structure* stimata (per scadenze fino a 10 anni) con la *term structure* corrispondente a diversi valori dei parametri che descrivono la dinamica del tasso a breve: come atteso, un aumento della velocità di aggiustamento β a 0,5 consente solo limitate deviazioni dei tassi dal livello di *steady state* (Figura 6); una riduzione del tasso di lungo periodo μ al 7 per cento annuo riduce la *term structure* con effetti maggiori sulle maggiori scadenze (Figura 7); un aumento del parametro di varianza σ^2 fa decrescere la struttura sia pure in forma non monotona (Figura 8 e Figura 9); un aumento di π accresce la *term structure* in misura crescente con la scadenza (Figura 10).

La Tavola 1 pone a confronto le *suesposte* (§2.1) misure di durata (in anni), nell'ipotesi che il tasso istantaneo $r(t)$ eguagli la sua media di lungo periodo μ , per vari valori di μ e per scadenze fino a 20 anni. Per $\beta = 0$ o prossimo a 0, come nel caso stimato ($\beta = 0,036529$), le tre misure differiscono in misura non rilevante, particolarmente per alti tassi cedolari.

TAVOLA 2 Prezzi d'emissione in equilibrio dei Certificati di Credito del Tesoro

Titolo	Effetto					Prezzo di emissione (6)
	Tasso base (1)	Spread* (2)	Lag* (3)	Prima cedola* (4)	Totale (5 = 1 + 2 + 3 + 4)	
CCT I	1	1,0712	1	1,0075	1,0787	0,9925
CCT II	1	1,0209	0,99584	0,99863	1,018	0,975
CCT IIa	1,0031	1,0270	1,0016	1,003	1,0252	0,975**
CCT IIb	1,0237	1,0475	1,0224	1,0235	1,0461	0,975**

* Comprende l'effetto del tasso di riferimento

** Prezzo ipotetico

Legenda:

CCT I: CCT settennale 1.11.90; cedola semestrale; 1 cedola 9,25%; *spread* semestrale 0,01; tasso base: BOT a 6 mesi con *lag* di 1,5 mesi; prezzo di emissione: 99,25%.

CCT II: CCT decennale 1.3.95; cedola annuale; 1 cedola 13,8%; *spread* annuale 0,005; tasso base: BOT a 12 mesi con *lag* di 1,5 mesi; prezzo d'emissione: 97,5%

CCT IIa: come CCT II con cedola semestrale.

CCT IIb: come CCT IIa con tasso base "BOT a 5 anni".

Viceversa, al crescere di β , cresce la discrepanza tra D_3 e le altre due misure di durata: per $\beta = 0,5$ il quarto blocco di riga della Tavola 1 mostra come le misure tradizionali di *duration* possano sovrastimare anche del doppio il rischio base dei titoli con cedole, correttamente colto dalla *duration* stocastica D_3 .

Lo stesso blocco di riga della Tavola 1 mostra la proprietà di concavità della *duration* al crescere della scadenza τ . Già Macaulay (1938) mostrò che la sua misura di *duration* non è necessariamente funzione crescente della scadenza, ma mentre D_1 raggiunge un massimo tipicamente per scadenze dell'ordine di 50 anni, D_3 può decrescere, per β non prossimo a 0, già per scadenze decennali.

3.3 Rischio e rendimento dei titoli a tasso variabile

I titoli a tasso variabile disponibili sul mercato presentano caratteristiche tali da non consentirne una perfetta immunizzazione dalle variazioni del tasso a breve. L'aspetto certamente più rilevante è costituito dall'uso di un tasso a lunga per la determinazione delle cedole mentre lieve è la distorsione introdotta dal *lag* temporale tra determinazione e godimento delle cedole. Altri elementi spuri, richiesti dalla presenza di una rischiosità estranea al modello, sono gli *spread*, la differenza tra la prima cedola e quella calcolata in base al meccanismo di indicizzazione e, infine, lo scarto di emissione.

È interessante verificare empiricamente l'effetto di ciascuno di questi elementi. Si consideri ad esempio il primo CCT settennale, emesso a novembre del 1983, legato al BOT a 6 mesi, con *spread* semestrale pari all'1 per cento. La corrispondenza tra il periodo di riferimento del tasso base (il BOT a sei mesi) e il periodo di godimento della cedola implicherebbe un rischio-rendimento pari a quello del BOT a 6 mesi. La presenza, però, degli elementi spuri sopra richiamati comportava una valutazione teorica del titolo pari a 107,87 lire (Tavola 2).

Evidentemente esisteva una rischiosità estranea al modello che richiedeva uno sconto di circa l'8,5 per cento (7,87 + 0,75) sul prezzo di emissione, posto pari a 99,25. Questa rischiosità aggiuntiva può essere approssimativamente valutata, nell'ipotesi che abbia un analogo effetto sul prezzo, in base all'elasticità del rischio base rispetto al prezzo.²⁹ Nel dominio temporale tale rischiosità corri-

²⁹ Dalla (25) si ottiene

$$\frac{\partial G}{\partial P} = \frac{G_\tau}{P_\tau} = -\frac{G_\tau}{P(G\beta\mu + rG_\tau)}$$

dove G_τ è dato dalla (27). Pertanto

$$\Delta G \cong -\frac{G_\tau}{P(G\beta\mu + rG_\tau)} \Delta P$$

TAVOLA 3 Duration stocastica dei Certificati di Credito del Tesoro

Titolo	Effetto						
	Tasso base (1)	Spread* (2)	Lag* (3)	Prima cedola* (4)	Sub-totale (5 = 1 + 2 + 3 + 4)	Prezzo di emissione (6)	Totale (7)
CCT I	6,00	7,86	5,46	6,00	7,34	6,56	13,45
CCT II	12,00	12,73	11,35	12,00	12,09	14,29	16,00
CCT IIa	7,32	8,10	6,65	7,32	7,45	9,93	12,03
CCT IIb	16,48	17,10	15,92	16,48	16,55	20,84	22,84

* Comprende l'effetto del tasso di riferimento

** Prezzo ipotetico

Legenda:

CCT I: CCT settennale 1.11.90; cedola semestrale; 1 cedola 9,25%; *spread* semestrale 0,01; tasso base: BOT a 6 mesi con *lag* di 1,5 mesi; prezzo di emissione: 99,25%.

CCT II: CCT decennale 1.3.95; cedola annuale; 1 cedola 13,8%; *spread* annuale 0,005; tasso base: BOT a 12 mesi con *lag* di 1,5 mesi; prezzo d'emissione: 97,5%

CCT IIa: come CCT II con cedola semestrale.

CCT IIb: come CCT IIa con tasso base "BOT a 5 anni".

sponde a circa 7 mesi e mezzo che si aggiungono ai 6 del tasso base. Complessivamente quindi il mercato valutava la rischiosità del CCT non dissimile da quella di un "BOT" a 13 mesi e mezzo (Tavola 3).³⁰

Nel caso, invece, del CCT decennale emesso a marzo, legato al BOT a 12 mesi e con *spread* annuale pari allo 0,5 per cento, il rischio base è pari a circa 12 mesi e la rischiosità aggiuntiva può essere valutata in circa 4 mesi. Lo stesso CCT con cedole semestrali invece che annuali e con *spread* semestrale pari allo 0,25 per cento avrebbe invece un rischio base pari a circa 7,5 mesi e un rischio aggiuntivo pari a 4,5 mesi.

Si consideri, infine, il caso di un titolo decennale con cedole semestrali determinate in base ad un tasso a 5 anni e con *spread* semestrale pari allo 0,25 per cento. L'uso del tasso a lunga comporta un rischio base pari a quello di un "BOT" a 16,5 mesi circa; sommandovi il rischio aggiuntivo, valutabile in circa 6,5 mesi, si ottiene un rischio complessivo di circa 23 mesi.

È interessante notare che lo scarto d'emissione e i premi/sconti sulla prima cedola, diversamente dallo *spread* e dal *lag*, non hanno influenza sul rischio base del titolo. In particolare, il compenso alla rischiosità aggiuntiva in termini di scarto d'emissione - e non di *spread* - permette di non introdurre interazioni nel rischio base del titolo.

Per poter determinare il rendimento atteso di un titolo a tasso variabile per qualsiasi intervallo di tempo è necessario modellare la rischiosità aggiuntiva specifica dei titoli indicizzati. In proposito, si possono fare, al momento, solo semplici ipotesi di riduzione del rischio col trascorrere del tempo. L'unica condizione che si può porre con certezza è che tale rischio diventa nullo nel momento in cui viene determinata l'ultima cedola, poiché a tale data il titolo diventa di fatto a tasso fisso. Questo vincolo non si concilia con lo *spread* che viene corrisposto sull'ultima cedola pur in presenza di un rischio aggiuntivo nullo. Anche per questa considerazione è quindi più opportuno compensare il rischio aggiuntivo con lo scarto di emissione piuttosto che con lo *spread*.

³⁰ Inutile dire che i risultati ottenuti non sono indipendenti dalle ipotesi semplificatrici adottate e che comunque un confronto in termini di rischiosità non può nascondere la diversità sostanziale tra un titolo con cedole e rimborso a lunga e un titolo senza cedole e rimborso a breve, soprattutto per le implicazioni che ne discendono sulla politica di gestione del debito e sul grado di liquidità del portafoglio degli operatori.

BIBLIOGRAFIA

- ARNOLD, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, New York, J. Wiley, 1974.
- BARONE, E., "I rendimenti attesi dei titoli obbligazionari: indicizzazione, convertibilità, clausole a favore dell'emittente e del portatore", Banca d'Italia, *Contributi alla Ricerca Economica*, 11, pp. 77-124, Dic. 1983.
- BELSLEY, D. A., KUH, E. e WELSCH, R. E., *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*, New York, J. Wiley, 1980.
- BERGSTROM, A. R. (ed.), *Statistical Inference in Continuous Time Economic Models*, Amsterdam, North-Holland, 1976.
- BICKSLER, J. L. (ed.), *Handbook of Financial Economics*, Amsterdam, North-Holland, 1979.
- BLACK, F. e SHOLES, M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 3, pp. 637-654, 1973.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. jr. e ROSS, S. A., "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", Stanford University, Graduate School of Business, Research Paper n. 468, August 1978. Anche in *Econometrica*, 53, 2, (1985a) pp. 363-384, (1985b) pp. 385-407.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. jr. e ROSS, S. A., "Duration and the Measurement of Basis Risk", *Journal of Business*, 52, 1, pp. 51-61, 1979.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. jr. e ROSS, S. A., "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts", *Journal of Finance*, XXXV, 2, pp. 389-403, 1980.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. jr. e ROSS, S. A., "A Re-Examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, XXXVI, Sept., pp. 769-799, 1981a.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. jr. e ROSS, S. A., "The Relation Between Forward Prices and Futures Prices", *Journal of Financial Economics*, 9, pp. 321-346, 1981b.
- DOOB, J. L., *Stochastic Processes*, New York, J. Wiley, 1953.
- GANDOLFO, G., MARTINENGO, G. e PADOAN, P. C., *Qualitative Analysis and Econometric Estimation of Continuous Time Dynamic Models*, Amsterdam, North-Holland, 1981.
- GARMAN, M.B., "A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes", University of California, Berkeley, Institute of Business and Economic Research, W.P. n. 50, 1977.
- HICKS, J. R., *Value and Capital*, Oxford, Clarendon Press, 1939.
- HUANG, C., "Information Structure and Equilibrium Asset Prices", *Journal of Economic Theory*, 35, pp. 33-71, 1985.
- HURWICZ, L., "Theory of the Firm and of Investment", *Econometrica*, 14, April, pp. 109-136, 1946.
- INGERSOLL, J. E. jr, SKELTON, J. e WEIL, R. L., "Duration Forty Years Later", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Nov., pp.627-650, 1978.
- JARQUE, C.M. - BERA, K., "Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals", *Economic Letters*, 6, pp. 255-259, 1980.
- MACAULAY, F. R., "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856", New York, NBER, n. 33, 1938.
- MCKEAN, H. P. jr., *Stochastic Integrals*, New York, Academic Press, 1969.
- MARKOWITZ, H. M., *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investment*, New York, J. Wiley, 1959.
- MARSCHAK, J., "Money and the Theory of Assets", *Econometrica*, 6, 4, pp. 311-325, 1938.
- MERTON, R.C., "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, IV, Spring, pp. 141-183, 1973a.
- MERTON, R.C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, 41, 5, pp. 867-887, 1973b.

- MUTH, J. F., "Rational Expectations and the Theory of Price Movements", *Econometrica*, 29, July, pp. 315-335, 1961.
- PHILLIPS, P. C. B., "The Estimation of Linear Stochastic Differential Equations with Exogenous Variables", in BERGSTROM (ed.), chapter 7, 1976.
- REDINGTON, F. M., "Review of the Principle of Life Office Valuations", *Journal of the Institute of Actuaries*, 18, pp. 286-340, 1952.
- ROSS, S. A., "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13, pp. 341-360, 1976.
- SARGAN, J. D., "Some Discrete Approximations to Continuous Time Stochastic Models", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 36, pp.74-90, 1974. Anche in BERGSTROM (ed.), chapter 3, 1976.
- SMITH, C. W. jr., "Applications of Option Pricing Analysis", in BICKSLER, J. L. (ed.), chapter 4, 1979.
- VASICEK, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188, 1977.
- WYMER, C. R., "Econometric Estimation of Stochastic Differential Equation Systems", *Econometrica*, 40, pp. 565-577, 1972. Anche in Bergstrom (ed.), chapter 4, 1976.
- YAGLOM, A. M., *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*, traduzione a cura di R. A. Silverman, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice-Hall, 1962.

APPENDICE A

Processi diffusivi

Il moto browniano standard

Il processo stocastico a una dimensione $z(t, \omega) = z(t)$ [$t \geq 0, \omega \in \Omega$ definito nello spazio di probabilità (Ω, Φ, P)] si dice moto browniano (o processo di Wiener) standard se:

- a) è normale a media nulla e varianza t

$$z(t) \sim N(0, t) \quad (\text{a1})$$

- b) ha funzione di autocovarianza

$$C_z(t, s) = E[z(t)z(s)] = \min(t, s) \quad (\text{a2})$$

- c) ha valore iniziale $z(0) = 0$ quasi sicuramente (q. s.).

Da a), b), c) segue che tale processo è non stazionario e q. s. non ha massimo finito. Inoltre

- i) ha incrementi (del primo ordine, non sovrapposti) indipendenti (omogeneità nello spazio), stazionari (omogeneità nel tempo) e normali

$$\begin{aligned} z(t+h) - z(t) &\sim N(0, h) \\ &h > 0 \\ z(t+h) | z(t) &\sim N[z(t), h] \end{aligned} \quad (\text{a3})$$

Si noti che $z(t+h) - z(t) : h > 0$ è un moto browniano standard ed è indipendente da $z(s) \forall s \leq t$ (proprietà di non anticipazione);

- ii) ha q. s. traiettorie ovunque continue (continuità nel tempo) ed è continuo in media quadratica nello spazio degli stati;
 iii) ha q. s. traiettorie ovunque non derivabili e quindi a variazione illimitata;
 iv) è un processo di Markov (dato lo stato presente, gli stati futuri sono indipendenti dagli stati passati) e una martingala avendo incrementi indipendenti a media nulla. Viceversa, un processo di Markov normale e una martingala a incrementi indipendenti e q. s. traiettorie continue sono (rappresentabili con) moti browniani [Doob(1953 p. 384)].

Per definizione si pone, per l'incremento infinitesimo dt

$$dz(t) \equiv z(t+dt) - z(t) \quad (\text{a4})$$

$$z(t) = \int_0^t dz(v) \quad (\text{a5})$$

e vale

$$dz(t) \sim N(0, dt) \quad (\text{a6})$$

$$\text{Cov}[dz(t), dz(s)] = 0 \quad \forall t \neq s \quad (\text{a7})$$

Il processo stocastico a K dimensioni

$$Z(t) = [z_1(t), \dots, z_k(t)]' \quad : \quad t \geq 0 \quad (\text{a8})$$

si dice di Wiener standard se le sue componenti sono processi di Wiener standard a una dimensione, mutuamente indipendenti. In tal caso si ha

$$dZ(t) \sim N(0, dt \mathbf{I}_k) \quad (\text{a9})$$

NB.: Particelle microscopiche in un fluido si muovono in modo irregolare per l'impatto con le molecole del fluido. Il botanico inglese R. Brown osservò il fenomeno nel 1828. A. Einstein (1905) mostrò che, in prima approssimazione, ciascuna coordinata $z(t)$ di una particella libera da campi di forze esterni definisce una funzione identificabile con il sentiero campionario di un moto browniano non standard del tipo

$$z(t) - z(s) \sim N(0, \sigma^2 |t - s|) \quad t > s \quad (\text{a10})$$

dove:

- la costante parametrica σ^2 dipende dalle caratteristiche fisiche della particella e del liquido;
- $(t - s)$, affinché il modello approssimi adeguatamente il fenomeno, è di un ordine di grandezza non minore dell'intervallo temporale medio tra gli impatti molecolari.

Le probabilità di transizione della particella soddisfano l'equazione alle derivate parziali (di Fourier - Kolmogorov) che esprime la diffusione del calore.

L. Bachelier (1900), in uno studio sulla teoria della speculazione, anticipò numerose proprietà del modello di Einstein - Wiener del moto browniano, tentandone un'applicazione alle fluttuazioni dei valori mobiliari rimasta a lungo insuperata.

Equazioni differenziali di Ito (1944) e processi diffusivi

Se $e(s, w)$ è un processo stocastico (funzione del tempo s e dell'evento elementare w) adattato alla struttura informativa $(\Phi_t; t > 0)$ generata dal moto browniano standard $z(t) : t > 0$ e rispetto a questo non anticipante [Arnold (1974), Huang (1985)] si può definire sull'intervallo $(0, t)$ l'integrale stocastico di Ito

$$I(t) = \int_0^t e(s, w) dz(s, w) \quad (\text{a11})$$

di cui, con scrittura equivalente

$$dI(t) = e(t, w) dz(t, w) \quad (\text{a12})$$

è il differenziale stocastico e risulta

$$E[I(t)] = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{a13})$$

$$E[I(t)I(s)] = \int_0^{\min(t,s)} E(e^2) dv \quad \forall s, t \geq 0 \quad (\text{a14})$$

Più in generale, un integrale stocastico di Ito è dato dall'equazione

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, w) ds + \int_0^t e(s, w) dz(s, w) \quad t \geq 0 \quad (\text{a15})$$

[con f, e processi stocastici "regolari" e x_0 indipendente da $z(t) : t > 0$], ovvero, con scrittura equivalente, dall'equazione stocastica di Ito

$$dx(t) = f(t, w) dt + e(t, w) dz \quad (\text{a16})$$

condizionata a

$$x(0) = x_0 \quad (\text{a17})$$

Una soluzione è un processo stocastico che soddisfa la (a15) o equivalentemente la (a16) con probabilità 1. In genere f, e dipendono dall'evento elementare attraverso il processo $x(t)$ per cui

$$f(t, w) \equiv f(t, x) \quad , \quad e(t, w) \equiv e(t, x) \quad (\text{a18})$$

Se f, e sono continui in t , la soluzione dell'equazione (a16) esiste unica ed è un processo diffusivo, cioè un processo stocastico markoviano con q. s. traiettorie continue e probabilità di transizione tali

che, intuitivamente, su intervalli di tempo infinitesimi (istanti) sono probabili solo spostamenti infinitesimi di $x(t)$ ed esiste la media condizionata a t o *drift* ($= f$) e la varianza condizionata a t ($= e^2$) dello spostamento istantaneo. Viceversa, ogni processo diffusivo è la soluzione di un'equazione differenziale stocastica di Ito quale la (a16) [cfr. Arnold (1974) pp. 154-156, Doob (1953) §VI.3].

Se f, e non dipendono direttamente dal tempo, il processo $x(t)$ è temporalmente omogeneo (probabilità di transizione stazionarie).

Se x_0, f, e non dipendono dall'evento elementare w il processo $x(t)$ si dice processo di Wiener non standard essendo

$$x(t) \sim N \left[x_0 + \int_0^t f(v) dv, \int_0^t e^2(v) dv \right] \quad (a19)$$

$$C_x(t, s) = \int_0^{\min(t, s)} e^2(v) dv \quad (a20)$$

ed avendo incrementi non sovrapposti normali indipendenti. Evidentemente

$$z[T(t)] = x(t) - x_0 - \int_0^t f(v) dv \quad (a21)$$

con

$$T(t) = \int_0^t e^2(v) dv \quad (\text{tempo intrinseco}) \quad (a22)$$

è un moto standard con una trasformazione del parametro temporale.

Se $x_0 = 0, f = 0, e^2 = 1, x(t)$ è il moto browniano standard.

Il lemma di Ito (1951)

Sia

$$dx_i = f_i dt + e_i dz \quad i = 1, \dots, n \quad (a23)$$

e sia

$$y = F[t, x_1(t), \dots, x_n(t)] \quad (a24)$$

dove

$$F: [0, \infty[\times |R^n \rightarrow |R \quad (a25)$$

tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &\equiv F_t & \frac{\partial F}{\partial x_i} &\equiv F_i & i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} &\equiv F_{ij} & & & i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (a26)$$

siano derivate parziali continue.

Allora y è un integrale stocastico con differenziale

$$dy = F_t dt + \sum_i F_i dx_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j F_{ij} dx_i dx_j \quad (a27)$$

dove

$$dx_i dx_j = e_i e_j dt \quad (a28)$$

assunte valide le seguenti regole moltiplicative

$$\begin{aligned}
(dz)^2 &= 0 && \text{v. a. degenerare} \\
(dt)^2 &= 0 && \\
dzdt &= 0 && \text{v.a. degenerare}
\end{aligned}
\tag{a29}$$

[cfr. McKean (1969, §2.6), Arnold 1974, p. 50) e Smith (1979, Appendix)].

Esempio 1

$$y = F[z(t)] = z^2. \tag{a30}$$

Applicando il lemma di Ito si ottiene

$$d(z^2) = 2zdz + \frac{2}{2}(dz)^2 = 2zdz + dt \tag{a31}$$

che equivale, integrando, a

$$\int_0^t d(z^2) = 2\int_0^t zdz + \int_0^t ds \tag{a32}$$

da cui

$$\int_0^t zdz = \frac{1}{2}(z^2 - t) \tag{a33}$$

Pertanto $\int_0^t zdz$ ha distribuzione di tipo chi-quadro con un grado di libertà.

Esempio 2

$$y = \exp\left(\int_0^t dz - \frac{1}{2}\int_0^t ds\right) = \exp\left(z - \frac{t}{2}\right) = F(t, z) \tag{a34}$$

Applicando il lemma di Ito si ottiene

$$dy = ydz \tag{a35}$$

e quindi $y = \exp(z - t/2)$ risulta avere nell'ambito stocastico di Ito il ruolo dell'esponenziale $\exp(z)$ nelle equazioni differenziali ordinarie. Si noti che $y \geq 0$ $E(y) = 1$.

N.B.: il lemma di Ito e i concetti correlati sono facilmente estendibili al caso di moto browniano a K dimensioni.

APPENDICE B

Titoli a tasso variabile

Sia dato un titolo a tasso variabile, di valore facciale unitario, valore corrente $B(t)$ e pagamenti discreti $C(t_i, r)$ $i = 1, \dots, n$. Siano t_0 la sua data di emissione ovvero quella del pagamento avvenuto più di recente e $t_1, t_2, \dots, t_n = T$ le successive date di godimento delle cedole con T data di scadenza del titolo.

La *valuation equation* (v. il paragrafo 2) è data da

$$\hat{L}(B) + B_t + C(t, r) - rB = 0 \quad (b1)$$

dove

$$\hat{L}(B) = \frac{1}{2} a^2(r) B_{rr} + [b(r) - \theta(r)] B_r \quad (b2)$$

e

$$C(t, r) = \begin{cases} C(t_i, r) & \text{se } t = t_i \\ 0 & \text{se } t \neq t_i \end{cases} \quad (b3)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (b1) con le opportune condizioni al contorno è, per $t_0 \leq t < t_1$, data da [CIR(1978, lemma 4)]

$$B(t) = \hat{E}_{t,r} \left\{ \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] + \sum_{i=1}^n C(t_i) \exp \left[- \int_t^{t_i} r(s) ds \right] \right\} \quad (b4)$$

dove E è l'operatore valore atteso (condizionato da t e r) associato alla distribuzione *risk-adjusted* di r , vale a dire con $b^*(r) = b(r) - \varphi(r)$ al posto del *drift* $b(r)$.

Nel caso di cedole determinate alle date di pagamento, ponendo

$$C(t_i) = \exp \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} r(t) dt \right) - 1 \quad (b5)$$

si ottiene da (b4)

$$\begin{aligned} B(t) &= \hat{E} \left\{ \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] + \sum_{i=1}^n \left\{ \exp \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} r(s) ds \right] - 1 \right\} \exp \left[- \int_t^{t_i} r(s) ds \right] \right\} = \\ &= \hat{E} \left\{ \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] + \sum_{i=1}^n \left[\exp \left[- \int_t^{t_{i-1}} r(s) ds \right] - \exp \left[- \int_t^{t_i} r(s) ds \right] \right] \right\} = \\ &= \hat{E} \left\{ \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] + \exp \left[- \int_t^{t_0} r(s) ds \right] - \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] \right\} = \\ &= \hat{E} \left\{ \exp \left[- \int_t^{t_0} r(s) ds \right] \right\} = \exp \left[\int_0^t r(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (b6)$$

Si noti che per $t = t_0$, $B = 1$.

Nel caso di cedole determinate Δ unità di tempo prima delle date di pagamento, indicando con δ la periodicità costante delle cedole, si può porre

$$C(t_i) = \frac{1}{P(t_i - \Delta, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \quad (b7)$$

assumendo implicitamente che la cedola da pagarsi al tempo t sia determinata dal tasso corrente in $t - \Delta$ per la scadenza δ . In base alla (b7), il valore di questo pagamento futuro, al tempo in cui è determinato, $t - \Delta$, è

$$D(t_i - \Delta) = P(t_i - \Delta, t_i) C(t_i) = \frac{P(t_i - \Delta, t_i)}{P(t_i - \Delta, t_i - \Delta + \delta)} - P(t_i - \Delta, t_i) \quad (\text{b8})$$

e il prezzo del titolo è dato dalla (b4) ovvero, equivalentemente, da

$$B(t) = \hat{E} \left\{ \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] + \sum_{i=1}^n D(t_i - \Delta) \exp \left[- \int_t^{t_i - \Delta} r(s) ds \right] \right\} \quad (\text{b9})$$

Per $\Delta \neq \delta$ la (b9) è risolvibile solo specificando la dinamica stocastica di $r(t)$. Viceversa, per $\Delta = \delta$ la (b8) si semplifica in

$$D(t_i - \Delta) = D(t_{i-1}) = 1 - P(t_{i-1}, t_i) \quad (\text{b10})$$

e la (b9) diventa

$$\begin{aligned} B(t) &= \hat{E} \left\{ \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] + [1 - P(t_0, t_1)] \exp \left[- \int_t^{t_0} r(s) ds \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^n [1 - P(t_{i-1}, t_i)] \exp \left[- \int_t^{t_i} r(s) ds \right] \right\} \\ &= \hat{E} \left\{ \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] \right\} + \hat{E} \left\{ \frac{[1 - P(t_0, t_1)] \exp \left[- \int_t^{t_0} r(s) ds \right]}{\exp \left[- \int_{t_0}^t r(s) ds \right] \exp \left[- \int_t^{t_0} r(s) ds \right]} \right\} + \\ &\quad + \hat{E} \left\{ \sum_{i=2}^n \left[\exp \left(- \int_t^{t_i} r(s) ds \right) - P(t_{i-1}, t_i) \exp \left(- \int_t^{t_i} r(s) ds \right) \right] \right\} \\ &= P(t, T) + \frac{1 - P(t_0, t_1)}{P(t_0, t_1)} P(t, t_1) + \sum_{i=2}^n \left\{ P(t, t_{i-1}) - \hat{E} \left[P(t_{i-1}, t_i) \exp \left(- \int_t^{t_i} r(s) ds \right) \right] \right\} \\ &= P(t, T) + \frac{1 - P(t_0, t_1)}{P(t_0, t_1)} P(t, t_1) + [P(t, t_1) - P(t, T)] = \frac{P(t, t_1)}{P(t_0, t_1)} \end{aligned} \quad (\text{b11})$$

in cui si sono usate le seguenti eguaglianze, la prima derivante dalla (b4), la seconda - valida $\forall u \in [t, T]$ - dalla definizione di valore medio condizionato:

$$P(t, T) = \hat{E}_t \left\{ \exp \left[- \int_t^T r(s) ds \right] \right\} = \hat{E}_t \left\{ \hat{E}_n \left[\exp \left(- \int_n^T r(s) ds \right) \right] \exp \left[- \int_t^n r(s) ds \right] \right\} \quad (\text{b12})$$

Nel caso usuale $\Delta > \delta$, per evitare i problemi connessi al calcolo del valor medio (b9), si può assumere che la cedola da pagarsi in t_i sia determinata dal tasso *forward*, al tempo t , su un contratto che assicuri l'acquisto in $t_i - \Delta$ di un titolo che dia diritto ad un'unità monetaria in $t_i - \Delta + \delta$. Tale cedola è:

$$\begin{aligned} C(t_i) &= \exp[R(t, t_i - \Delta, t_i - \Delta + \delta)] - 1 = \\ &= \frac{1}{Q(t, t_i - \Delta, t_i - \Delta + \delta)} - 1 = \frac{P(t, t_i - \Delta)}{P(t, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \end{aligned} \quad (\text{b13})$$

e la (b4) diventa

$$\begin{aligned}
B(t) &= P(t, T) + \sum_{i=1}^n \hat{E} \left\{ \left[\frac{P(t, t_i - \Delta)}{P(t, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \right] \exp \left[- \int_t^{t_i} r(s) ds \right] \right\} = \\
&= P(t, T) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{P(t, t_i - \Delta)}{P(t, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \right] P(t, t_i) = \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{P(t, t_i - \Delta)}{P(t, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \right] P(t, t_i) + \frac{P(t, t_n - \Delta)}{P(t, t_n - \Delta + \delta)} P(t, t_n)
\end{aligned} \tag{b14}$$

Se t_0 ($t_0 \leq t \leq t_1$) è la data di emissione, si può scrivere:

$$B(t) = [\exp(\bar{R}) - 1] P(t, t_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[\frac{P(t, t_i - \Delta)}{P(t, t_i - \Delta + \delta)} - 1 \right] P(t, t_i) + \frac{P(t, t_n - \Delta)}{P(t, t_n - \Delta + \delta)} P(t, t_n) \tag{b15}$$

con \bar{R} tasso della prima cedola, determinato all'emissione.

Per $\Delta = \delta$, la (b15) si semplifica in

$$B(t) = \exp(\bar{R}) P(t, t_1) \tag{b16}$$

e quindi, se \bar{R} è determinato sulla base del meccanismo di indicizzazione descritto, si ottiene, come atteso:

$$B(t) = \frac{P(t, t_1)}{P(t_0, t_1)} \tag{b17}$$

Per $\Delta = \delta + h > \delta$, si ha:

$$B(t) = [\exp(\bar{R}) - 1] P(t, t_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[\frac{P(t, t_{i-1} - h)}{P(t, t_i - h)} - 1 \right] P(t, t_i) + \frac{P(t, t_{n-1} - h)}{P(t, t_n - h)} P(t, t_n) \tag{b18}$$

il cui rischio base risulta, dalla definizione,

$$-\frac{B_r}{B} = \frac{1}{B} \left\{ \begin{aligned} &[\exp(\bar{R}) - 1] G(t_1) P(t, t_1) + \\ &+ [G(t_1 - h) - G(t_2 - h)] \frac{P(t, t_2) P(t, t_1 - h)}{P(t, t_2 - h)} + \left[\frac{P(t, t_1 - h)}{P(t, t_2 - h)} - 1 \right] G(t_2) P(t, t_2) + \dots \\ &+ [G(t_{n-1} - h) - G(t_n - h)] \frac{P(t, t_{n-1} - h) P(t, t_n)}{P(t, t_n - h)} + \frac{P(t, t_{n-1} - h)}{P(t, t_n - h)} G(t_n) P(t, t_n) \end{aligned} \right\} \tag{b19}$$

essendo

$$G(t_i) = G(t_i - t) = -\frac{P_r}{P} \tag{b20}$$

il rischio base di un titolo senza cedole e a rimborso unico con data di scadenza t_i [v. (41)].

La (b15) è una formula sufficientemente flessibile per accogliere varie caratteristiche quantitative di un titolo a tasso variabile. Ad esempio, nel caso dei Certificati di Credito del Tesoro, si ha che:

- la prima cedola è predeterminata dall'emittente;
- le cedole successive sono date da una media aritmetica dei tassi di riferimento vigenti nel bimestre che precede di un mese la data d'inizio del godimento delle cedole;
- ad esse è aggiunto uno *spread* costante;
- il prezzo di emissione è sotto la pari.

Se poi, in via ancor più generale, il contratto includesse anche la clausola di tassi di riferimento con scadenza diversa (multipla) rispetto alla periodicità delle cedole (previo adeguamento dei tassi di riferimento a quest'ultima periodicità), la formula del prezzo sarebbe:

$$\begin{aligned}
 B(t) = & \left[\exp(\bar{R}) - 1 \right] P(t, t_1) + \\
 & + \left\{ \left[\frac{P(t, t_1 - h - k)}{P(t, t_2 - h - k + g\delta)} \frac{P(t, t_1 - h)}{P(t, t_2 - h + g\delta)} \right]^{\frac{1}{2(g+1)}} - 1 + S \right\} P(t, t_2) + \\
 & + \dots + \\
 & + \left\{ \left[\frac{P(t, t_{n-1} - h - k)}{P(t, t_n - h - k + g\delta)} \frac{P(t, t_{n-1} - h)}{P(t, t_n - h + g\delta)} \right]^{\frac{1}{2(g+1)}} + S \right\} P(t, t_n)
 \end{aligned} \tag{b21}$$

dove S è lo *spread* additivo, $g + 1$ è la molteplicità delle scadenze di riferimento rispetto alla periodicità delle cedole, k è l'intervallo di tempo tra i due tassi di riferimento che vengono mediati. Ai fini pratici, si può utilizzare la seguente approssimazione, accettabile in particolare per strutture per scadenza monotone e per k prossimo a 0:

$$\sqrt{\frac{P(t, t_{i-1} - h - k)}{P(t, t_i - h - k + g\delta)} \frac{P(t, t_{i-1} - h)}{P(t, t_i - h + g\delta)}} \approx \frac{P(t, t_{i-1} - h - k/2)}{P(t, t_i - h - k/2 + g\delta)} \tag{b22}$$

L'espressione del rischio base $-B_r/B$ della (b21) non presenta alcuna difficoltà sostanziale ed è omessa per brevità.